

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Toshkent moliya instituti

Q Safaeva.

MATEMATIK DASTURLASH

(Darslik)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy o'quv yurtlarida ilmiy-uslubiy birlashmalar faoliyatini muvofiqlashtiruvchi Kengash tomonidan darslik sifatida tavsiya etilgan.

Toshkent – 2007

**Q.Safaeva. Matematik dasturlash. Darslik “IQTISOD-MOLIYA”,
303 bet, 2007y.**

Annotatsiya:

Ushbu kitob matematik dasturlashdan o'zbek tilida yozilgan birinchi darslik bo'lib, unda chiziqli, chiziqsiz, dinamik hamda noaniqlikda yechimlar qabul qilish nazariyasiga doir bo'lgan matritsali o'yinlar nazariyasi va tabiat bilan o'yinlar tizimli ravishda yoritilgan.

Darslik 340000 – «Biznes va boshqaruv» ta'lim sohasidagi barcha bakalavriat yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan iqtisodiyot va texnika oliy o'quv yurtlarining barcha talabalari, professor-o'qituvchilari, aspirantlar va ilmiy xodimlar foydalanishlari mumkin.

Книга является первым учебником на узбекском языке по курсу «Математическое программирование» и содержит систематическое изложение таких разделов как линейное, нелинейное, динамическое программирования, методы принятия решений в условиях неопределенности – теории матричных игр и игры с природой.

Учебник предназначен студентам обучающихся по направлениям 340000 – «Бизнес и управление» бакалавриатуры высшего образования. Учебником могут пользоваться студенты и профессорско-преподавательский состав всех экономических и технических ВУЗов, а также аспиранты и научные сотрудники.

This is the first text-book in Uzbek on the mathematic programming and contains the systematic summary such chapters as line non-line, dynamic program, the methods of making decisions in the conditions of intimateness the theory of matrices games and games with nature.

This text-book is for the students training in the direction of bachelor 340000- «Biznes and management».

Thee students and teachers of all economical and technical higher educational institutions, post-graduates and researches can use this text-book.

O'zbekiston fanlar akademiyasining
akademigi B.K. Qobulov tahriri ostida

Taqrizchilar: f.m.f.d., prof. Sh. Shorahmedov
f.m.f.n., dots. E. Mamurov

Toshkent Moliya instituti, 2007y.

So'z boshi

Iqtisodiyot bo'yicha kadrlar tayyorlovchi oliy o'quv yurtlarida matematik fanlarni o'qitishdan maqsad talabalarni iqtisodiyotning nazariy va amaliy masalalarini yechishda kerak bo'lgan matematik apparat bilan tanishtirishdan iborat. Ana shunday apparatlardan biri, mumkin bo'lgan iqtisodiy echimlar to'plamidan maqsadga muvofiq, eng yaxshi yechimni topish usullarini o'rgatuvchi fan matematik dasturlashdir. Inson faoliyatining turli sohalarda, jumladan, iqtisodiy izlanishlarda, xalq mamlakat iqtisodiyotini va uning turli tarmoqlarini, bozor, firma va ishlab chiqarish korxonalarini boshqarish va rejalashtirishda hamda iqtisodiy jarayonlarni optimallashtirishda matematik dasturlash usullari qo'llaniladi. Shu sababali matematik dasturlash fani iqtisodiy yo'nalishlardagi oliy o'quv yurtlarida asosiy fan sifatida o'qitilib kelmoqda.

Mazkur kitob matematik dasturlashdan lotin grafikasiga asoslangan o'zbek tilida yozilgan birinchi darslik bo'lib, u «O'qituvchilar tayorlash va pedagogika» fani, «Biznes va boshqaruv» ta'lim sohasidagi barcha bakalavriat yo'nalishlari Davlat ta'lim standartlari asosida yaratilgan o'quv dasturlariga mos keladi. Darslikni yaratishda muallif o'zining ko'p yillar davomida Toshkent Xalq Xo'jalik institutida va Toshkent Moliya institutida o'qigan ma'ruzalari hamda ko'p yillik ilmiy-pedagogik tajribalariga tayangan. Darslikka kiritilgan asosiy mavzular muallif tomonidan chop etilgan o'quv qo'llanmalar va ma'ruza kurslari tarkibiga kiritilgan va ko'p yillar davomida iqtisodiy oliy o'quv yurtlari talabalariga xizmat qilib, sinovdan o'tgan.

Hozirgi kunda matematik dasturlash fanidan darslik va o'quv qo'llanmalar sonining etarli darajada emasligi, o'zbek tilida hozirgi zamon talablariga javob beradigan darsliklarning mavjud emasligi matematik dasturlashning nazariy va amaliy muammolariga bag'ishlangan darslik yaratish zaruriyatini tug'dirgan.

Mazkur kitob ushbu maqsad yo'lida qo'yilgan ilk qadamlardan biridir. Darslik matematik dasturlashning nazariy asoslari va amaliy masalalariga bag'ishlangan bo'lib, unda chiziqli dasturlashning predmeti, asosiy masalalari, geometrik va algebrik yechish usullari (I- va II boblar), chiziqli dasturlashda ikkilanish nazariyasi (III bob), parametrlil dasturlash (IV bob) transport masalasi va uni echish usullari (V bob), butun sonli dasturlash (VI bob), chiziqsiz dasturlashning umumiy nazariyasi (VII bob), qavariq dasturlash masalasi va uni yechish usullari (VIII bob), kvadratik dasturlash masalasi va uni yechish usullari (IX bob), chiziqsiz dasturlash masalalarini yechish uchun gradient usullar (X bob) keltirilgan.

Ba'zi chiziqsiz va butun sonli dasturlash masalalarini yechishda qo'llaniladigan hisoblash usullaridan biri dinamik dasturlashdir. Dinamik dasturlashni vaqtga bog'liq bo'lgan jarayonlarni optimallashtirish masalalarini o'rgatuvchi matematik dasturlashning bir bo'limi deb qarash ham odat tusiga kirgan. Darslarning XI bobi dinamik dasturlashga bag'ishlangan. Unda dinamik dasturlash ko'p bosqichli masalalarning optimal yechimini topishning matematik nazariyasi sifatida aniqlangan.

Iqtisodiy amaliyotda raqobatli holatlar ko'p uchraydi. Masalan, bir xil mahsulot ishlab chiqaruvchi firmalar, turdosh mahsulotlarni sotuvchilar, iste'molchilar va

ta'minotchilar, bank va mijozlar o'rtasidagi ayrim munosabatlarni raqobatli deb qarash mumkin. Raqobatli holatlar bilan bog'liq bo'lgan iqtisodiy masalalarni yechish uchun ilmiy asoslangan usullar kerak bo'ladi. Ana shu usullarni o'rgatuvchi fan o'yinlar nazariyasi hisoblanadi va u raqobatli holatlardagi masalalarni echishning matematik nazariyasini o'rgatadi. O'yinlar nazariyasi bilan chiziqli dasturlash orasida quyidagi bog'liqlik mavjud: a) agar chiziqli dasturlash iqtisodiy jarayonning optimal yechimini topishga yordam bersa, o'yinlar nazariyasi shu optimal yechimini topish strategiyasini aniqlaydi; b) har qanday matritsali o'yinni chiziqli dasturlash usullari bilan yechish mumkin va aksincha. Ana shu bog'liqliklarni nazarga olgan holda darslikning XII bobi o'yinlar nazariyasi elementlariga bag'ishlangan.

Darslik ko'plab iqtisodiy masalalarni o'z ichiga oladi. Har bir mavzuning nazariy asoslarini amaliy masala va misollar yechishga tatbiq qilish yo'llari ko'rsatilgan. Har bir bob tayanch so'z va iboralar, nazorat savollari va mustaqil yechish uchun masalalar bilan yakunlangan.

Darslik iqtisodiy yo'nalishdagi oliy o'quv yurtlarining bakalavriat yo'nalishida ta'lim oluvchi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan matematik dasturlash fani o'qitiladigan barcha oliy yurtlarining talabalari, magistrantlari, aspirantlari va professor o'qituvchilari foydalanishi mumkin.

Muallif mazkur darslikning qo'l yozmasini sinchiklab o'qib chiqib, o'zlarining qimmatli maslahatlari bilan uning sifatini yaxshilashga xissa qo'shgan O'zbekiston Fanlar Akademiyasining akademigi V.Q. Qobulovga, M.Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti professori F. Nasriddinovga, Toshkent Davlat iqtisodiyot universitetining «Oliy matematika» kafedrasi dotsenti H. Jumaevga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

Kirish.

Matematik dasturlash fani xo'jalikni ratsional boshqarish printsiptini o'rgatadi. Bu erda dasturlash so'zi qo'yilgan maqsadga erishish yo'lida bajariladigan ishlar rejasini anglatadi. Matematik dasturlashga iqtisodiyotdagi ekstremal masalalarni o'rganuvchi va ularni yechish usullarini yaratuvchi matematikaning bir yo'nalishi deb qarash odat tusiga kirgan. Matematika nuqtai nazaridan o'zgaruvchilarga ma'lum (chiziqli yoki chiziqsiz) cheklanmalar qo'yilgan ko'p o'lchovli funktsiyaning maksimum va minimumini topish masalasi umumiy nom bilan matematik dasturlash masalasi deb ataladi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, matematik dasturlash chiziqli va chiziqsiz tengliklar va tengsizliklar bilan berilgan to'plamlarda aniqlangan ko'p o'lchovli funktsiyalarning maksimum va minimum qiymatlarini topish nazariyasi va usullarini o'rgatadi. Maksimumi va minimumi qidirilayotgan funktsiya maqsad funktsiyasi deb ataladi.

Noma'lumlarga qo'yilgan cheklamalar chiziqli va chiziqsiz tenglik va tengsizliklar sistemasidan iborat bo'lib, ular boshqaruvchi o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlar sohasini (maqsad funktsiyaning aniqlanish sohasini) ifodalaydilar.

Matematik dasturlashning predmeti korxona, firma, bozor, ishlab chiqarish birlashmasi, harbiy xizmat ob'ektlari va boshqa iqtisodiy jarayonlarni tasvirlovchi matematik modellardan iborat bo'ladi.

O'rganilayotgan iqtisodiy jarayonlarning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tasvirlash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini qurish deyiladi. Iqtisodiy jarayonning birinchi modeli frantsuz olimi F.Kene (1764-1774) tomonidan yaratilgan. U 1758 yilda «Iqtisodiy jadval», 1766 yilda «Arifmetik formula» nomli asarlarini chop etgan.

F.Kene o'z asarlarida jamiyatda takror ishlab chiqarishning asosiy bosqichlarini matematik model shaklida ifodalagan.

«Matematik dasturlash» masalasining modelini umumiy xolda quydagicha ifodalash mumkin.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning ekstremumi

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi x_1, x_2, \dots, x_n noma'lumlarning qiymatlar sohasida topilsin. Bu erda f, g_i berilgan funktsiyalar, b_i -ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Agar berilgan masalada f , *ea* g_i funktsiyalarning hammasi chiziqli bo'lsa, u holda berilgan masala «chiziqli dasturlash» masalasi bo'ladi.

Agar f , *ea* g_i funktsiyalardan kamida bittasi chiziqsiz bo'lsa, u holda berilgan model «chiziqsiz dasturlash» masalasini ifodalaydi.

Agar f , *ea* g_i funktsiyalar chiziqli bo'lib, noma'lumlarga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan bo'lsa, u holda berilgan masala «butun sonli dasturlash» masalasi bo'ladi.

Agar f , *ea* g_i funktsiyalardan birortasi tasodifiy miqdorlarni o'z ichiga olsa, u holda berilgan model «stoxastik dasturlash» masalasini ifodalaydi.

Agar f , ϵa g_i funktsiyalar vaqtga bog'liq bo'lib, masalani yechish ko'p bosqichli jarayon sifatida qaralsa, u holda berilgan model dinamik dasturlash masalasidan iborat bo'ladi.

Agar f , ϵa g_i funktsiyalardan kamida bittasi qandaydir parametrga bog'liq bo'lsa, u holda berilgan masala «parametrli dasturlash» masalasi bo'ladi.

Mazkur darslik matematik dasturlashning yuqorida qayd etilgan barcha bo'limlarini hamda chiziqli dasturlash bilan bog'liq bo'lgan o'yinlar nazariyasi elementlarini o'z ichiga oladi.

Darslikning hajmi yo'l qo'ymagani va fan bo'yicha namunaviy dasturda nazarda tutilmagani uchun stoxastik dasturlash darslikka kiritilmadi.

I-BOB. CHIZIQLI DASTURLASHNING PREDMETI VA MASALALARI

1-§. Chiziqli dasturlash predmeti.

Chiziqli dasturlash usullari bilan yechiladigan masalalar va ularning matematik modellari

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning bir yo'nalishi bo'lib, u chegaralangan resurslar(xom ashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalar, er, suv, mineral o'g'itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko'p foyda olish yo'llarini o'rgatadi.

Chiziqli dasturlashning fan sifatida shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta'sir ko'rsatdi. 1975 yilda chiziqli programmalash nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo'yicha mutaxassis, «Chiziqli dasturlash» terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli dasturlashning iqtisodiy nazariyaga qo'shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli dasturlash chiziqli funktsiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma'lumlarga chegaralovchi shartlar qo'yilgandagi, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o'rgatuvchi fandır.

Noma'lumlarga chiziqli chegaralashlar qo'yilgan chiziqli funktsiyaning ekstremumini topish chiziqli dasturlashning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli dasturlash chiziqli funktsiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Chiziqli dasturlash usullarini qo'llab iqtisodiy jarayonlarning o'ziga xos qonuniyatlarini o'rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarni tuzish kerak. o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalari matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma'nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;

2) masaladagi ma'lum parametrlarni belgilash;

3) masaladagi noma'lumlarni (boshqaruvchi o'zgaruvchilarni) belgilash;

4) masaladagi cheklamalarni, ya'ni boshqaruvchi o'zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo'lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;

5) masalaning maqsadini chiziqli funktsiya orqali ifodalash. Bunday funktsiya maqsad funktsiya deb ataladi.

Boshqaruvchi o'zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funktsiyaga eng katta(maksimum) yoki eng kichik(minimum) qiymat bersin. Bundan ko'rinadiki, maqsad funktsiya boshqaruvchi noma'lumotlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini)

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko'p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o'rganamiz.

Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin: ulardan ixtiyoriy birini $i(i=1, \dots, m)$ bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Ulardan ixtiyoriy birini $j(j=1, \dots, n)$ bilan belgilaymiz.

<div> <div> <div></div> <div>i/ch faktorlari</div> </div> <div> <div>i/ch mahsulot turlari</div> </div> </div>	1	2	3	...	n	Mahsulot birligidan olinadigan daromad
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	C_2
...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	C_m
i/ch faktorining zahirasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishlab chiqarish rejasini shunday tuzish kerakki: a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir ishlab chiqarish faktorining miqdori ularning zahirasidan oshmasin; b) mahsulotlarni realizatsiya qilishidan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \leq b_2, \\ \text{-----} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \leq b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra hamma noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni:

$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, \dots, m) . \quad (1.2)$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak masalaning maqsadi mahsulotlarni realizatsiya qilishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat va uni

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \max, \quad (1.3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \leq b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \leq b_2 , \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \leq b_n , \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \dots, \ x_m \geq 0, \\ Y = s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_mx_m \rightarrow \max .$$

2. Iste'mol savati masalasi

Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil A_1, A_2, \dots, A_n ozuqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan A_1 ozuqa moddasidan b_1 miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 ozuqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n dan b_n miqdorda zarur bo'lsin va ularni m ta B_1, B_2, \dots, B_m mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin, har bir V_i mahsulot tarkibidagi A_j ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagicha jadvalga joylashtirish mumkin.

<div> <div>ozuqa</div> <div>moddalari mahsulotlar</div> </div>	A_1	A_2	...	A_n	Mahsulot bahosi
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	C_2
...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	C_m
ozuqa moddaning minimal normasi	b_1	b_2	...	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: iste'mol savatiga qanday mahsulotlardan qanchadan kiritish kerakki, natijada: a) odam organizmi qabul qiladigan ozuqa moddasi belgilangan minimal normadan kam bo'lmasin; b) iste'mol savatining umumiy bahosi minimal bo'lsin.

Iste'mol savatiga kiritiladigan i - mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \hline a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra hamma noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni:

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0. \quad (1.5)$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste'mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Shunday qilib «iste'mol savati» masalasining matematik modelini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \hline a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \min.$$

ko'rinishida, zish mumkin.

3. Optimal bichish masalasi

Faraz qilaylik korxonada m xil mahsulotlar tayyorlash (bichish) kerak bo'lsin, hamda har bir i -mahsulotdan a_i miqdorda tayyorlash rejalashtirilgan bo'lsin. Bu mahsulotlarni tayyorlash uchun n xil xomaki materiallar mavjud bo'lib, har bir j -xomaki materialning uzunligi b_j birlikni tashkil qilsin. Xomaki materiallardan tayyor mahsulot ishlab chiqarish uchun l xil bichish usullarini qo'llash mumkin bo'lsin hamda har bir j -xomaki materialni k -usul bilan bichganda xosil bo'ladigan i -mahsulot miqdori a_{ijk} , chiqindi esa S_{jk} birliklarni tashkil qilsin deb faraz qilamiz.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Tay-yorlanadigan mahsulot turlari	Xomaki mahsulotlar va ularni kesish usullari												Tay-yor mahsulotlar-ni i/ch rejasi	
	B_1				B_2				..	B_n				
	1	2	...	l	1	2	..	l	..	1	2	...		1
A_1	a_{111}	a_{112}	...	a_{11l}	a_{12} l	a_{122}	..	a_{12l}	..	a_{1n1}	a_{1n2}	...	a_{1n} l	a_1
A_2	a_{211}	a_{212}	...	a_{21l}	a_{22} l	a_{222}	..	a_{22l}	..	a_{2n1}	a_{2n2}	...	a_{2n} l	a_2
...
A_m	a_{m11}	a_{m12}	...	a_{m1l}	a_{m2} l	a_{m2} 2	..	a_{m2l}	..	a_{mn1}	a_{mn2}	...	a_{mnl}	a_m
Chiqindi-lar	C_{11}	C_{12}	...	C_{1l}	C_{21}	C_{22}	..	C_{2l}	..	C_{n1}	C_{n1}	...	C_{nl}	

Xomaki materiallarni qaysi usul bilan bichganda hosil bo'lgan tayyor mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi, sarf qilingan xom ashyo materiallar miqdori ularning zahirasidan oshmaydi hamda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

k -usul bilan bichiladigan j -xomaki materiallar miqdorini x_{jk} bilan belgilaymiz.

Ushbu belgilashlarda optimal bichish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda ziladi:

$$\begin{cases} x_{1l} + x_{12} + \dots + x_{1l} = b_1, \\ x_{2l} + x_{22} + \dots + x_{2l} = b_2, \\ \hline x_{nl} + x_{n2} + \dots + x_{nl} = b_n, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} + \dots + a_{1nl}x_{nl} = a_1, \\ a_{211}x_{11} + a_{212}x_{12} + \dots + a_{2nl}x_{nl} = a_2, \\ \text{-----} \\ a_{m11}x_{11} + a_{m12}x_{12} + \dots + a_{mnl}x_{nl} = a_m, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$x_{jk} \geq 0, (j=1, \dots, n; k=1, \dots, l) \quad (1.9)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l C_{jk} x_{jk} \rightarrow \min. \quad (1.10)$$

Bu erda(1.7) shart mavjud xomaki materiallarning hammasi kesi-lishi kerakligini, (1.8) shart tayyor mahsulotlar ishlab chiqarish bo'yicha rejani to'la bajarish zarurligini ko'rsatadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra undagi noma'lumlarning manfiy bo'laolmasligi (1.9) shart orqali ifodalanadi. (1.10) shart masalaning maqsadidan iborat bo'lib, u homaki materiallarni kesishdan hosil bo'ladigan chiqindilarni eng kam (minimal) bo'lishini ta'minlaydi.

Endi optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz.

Deylik, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari Δ_i ($i=1, m$) bo'lgan m xil detallarning har biridan a_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n ($j = \overline{1, n}$) usul bilan kesish hamda har bir j -usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i -detal tayyorlash va c_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin.

Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi.

Masalaning ma'lum parametrlarini quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz.

Tayyorlanadigan n detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	...	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Chiqqindilar miqdori	c_1	c_2	...	c_n	

j -usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= a_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (1.13)$$

Bu erda (1.11) shart har bir tayyor mahsulot bo'yicha reja to'liq bajarilishi kerakligini, (1.12) shart noma'lumlarning nomanfiyligini va (1.13) shart chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'lishini ko'rsatadi.

1-misol. Uzunligi 110 sm. bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mahsulotlar i/ch rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm.	2	1	1	-	-	-	40
35 sm.	-	1	-	3	1	-	30
50 sm.	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

Yechish. j - usul bilan kesiladigan po'lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45 sm bo'lgan xomaki mahsulotlardan ja'mi

$$2x_1 + x_2 + x_3$$

miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko'ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 40.$$

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35 sm. va 50 sm. bo'lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to'la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda

$$x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$$

va

$$x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$$

tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra belgilangan noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, demak

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0.$$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalaymiz.

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Masalaning shartiga ko'ra bu funktsiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow \min.$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow \min.$$

Hosil bo'lgan ifoda optimal bichish masalasining matematik modelidan iborat bo'ladi.

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, V, S karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom ashyolar miqdori (me'yori), xom ashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom ashyo turlari	1 tonna mahsulotga xom ashyo sarfi (t.hisobida)			Xom ashyo zahirasi (tonna)
	A	B	C	
shakar	0,8	0,5	0,6	800
qiyom	0,4	0,4	0,3	600
quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad(shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$$

miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasiidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak,

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin:

$$0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 600,$$

$$0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 120.$$

Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, V karameldan - $112x_2$, S karameldan - $126x_3$ birlik va ja'mi

$$108x_1 + 112x_2 + 126x_3$$

birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funktsiyaga ega bo'lamiz:

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow \max$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 600, \\ 0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3-misol. Odam organizmi uchun bir sutkada A ozuqa moddasidan 12 birlik, B ozuqa moddasidan esa 16 birlik kerak bo'lsin. Bu ozuqa moddalarni P_1 , P_2 mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin.

Bir birlik P_1 , P_2 mahsulotlar tarkibidagi A va B ozuqa moddalarining miqdori, mahsulotlar bahosi quyidagi jadvalda keltirilgan:

<div style="text-align: center;"> <div style="display: inline-block; transform: rotate(-45deg);"> Mahsu- lotlar </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> Ozuqa moddalari </div> </div>	Bir birlik mahsulotlar tarkibi- dagi turli ozuqa moddalarining miqdori		Ozuqa modda- larining minimal normasi
	P_1	P_2	
A	0,2	0,2	12
B	0,4	0,2	16
Mahsulot-lar bahosi	2	4	

Bir kunlik ovqatlanish rejasini qanday tuzganda odam organizmi kerakli ozuqa moddalarni minimal normadan kam qabul qilmaydi hamda sarf qilingan harajatlar eng kam (minimal) bo'ladi?

Yechish: 1 sutkada ovqatlanish uchun sarf qilinadigan P_1 mahsulot miqdorini x_1 bilan, P_2 mahsulot miqdorini esa x_2 bilan belgilaymiz.

U holda odam organizmi A ozuqa moddasidan hammasi bo'lib

$$0,2x_1 + 0,2x_2$$

miqdorda qabul qiladi. Shartga ko'ra bu miqdor minimal norma 12 dan kam bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 12.$$

Xuddi shunday yo'l bilan B ozuqa moddasi uchun

$$0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 16$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra masaladagi noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Masalaning maqsadi ovqatlanish uchun sarf qilingan harajatlarni minimallashtirishdan iborat.

1 sutkada sarf qilingan P_1 mahsulot uchun $2x_1$ birlik, P_2 mahsulot uchun $4x_2$ birlik va ja'mi

$$Y = 2x_1 + 4x_2$$

miqdorda harajat sarf qilinadi. x_1 va x_2 noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular Y funktsiyaga eng kichik (minimum) qiymat bersin, ya'ni

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

shart bajarilsin.

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 12, \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

2-§. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi va uning turli formada ifodalanishi

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq (\leq) b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m, \end{cases} \quad (1.14)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.15)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min(\max). \quad (1.16)$$

(1.14) va (1.15) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (1.16) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1.14) va (1.15) cheklamalari uning **chegaraviy shartlari** deb, (1.16) chiziqli funktsiya esa masalaning **maqsadi** yoki **maqsad funktsiyasi** deb ataladi.

Masaladagi barcha cheklamalar shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun ham (1.14) - (1.16) masala **chiziqli dasturlash** masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1.14) shart tenglamalar sistemasidan, « \geq » yoki « \leq » ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1.14)-(1.16) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.17)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.18)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (1.19)$$

(1.17)-(1.19) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi. Bu masala vektorlar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0, \quad (1.20)$$

$$X \geq 0, \quad (1.21)$$

$$Y = C'X \rightarrow \min. \quad (1.22)$$

bu erda

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - vektor - qator.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - vektor - ustun.

(1.17)-(1.19) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0, \quad (1.23)$$

$$X \geq 0, \quad (1.24)$$

$$Y = C'X \rightarrow \min, \quad (1.25)$$

bu erda $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ -qator vektor, $A = (a_{ij})$ - (1.17) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ - ustun vektorlar.

(1.17)-(1.19) masalani yig'indilar yordamida ham ifodalash mumkin: n

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.26)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, \dots, n) \quad (1.27)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min. \quad (1.28)$$

1-ta'rif. Berilgan (1.17)-(1.19) masalaning joiz yechimi yoki rejasi deb, uning (1.17) va (1.19) shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga aytiladi.

2-ta'rif. Agar joiz rejalar to'plamiga tegishli bo'lgan X^0 vektorning n-m ta koordinatasi (n – noma'lumlar soni, m – tenglamalar soni) nolga teng bo'lib, qolgan m ta koordinatalariga mos kelgan shart vektorlar(masalan, $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar) chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 joiz reja bazis(asosiy) reja deyiladi.

3-ta'rif. Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda aynigan bazis reja deyiladi.

4-ta'rif. Chiziqli funktsiya (1.19) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bazis reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi ustida quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. $\max Y$ ni $\min Y$ ga aylantirish. Har qanday chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko'rinishga keltirish uchun (1.14) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga va $\max Y$ ni $\min Y$ ga aylantirish kerak. $\max Y$ ni $\min Y$ ga keltirish uchun, $\max Y$ ni teskari ishora bilan olish, ya'ni $-\max Y = \min Y$ yoki $\max Y = -\min Y$ ko'rinishda olish etarlidir.

Haqiqatdan ham, har qanday $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning minimumi teskari ishora bilan olingan shu funktsiya maksimumining qiymatiga teng, ya'ni

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } -\max[f(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } -\min[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

ifodalar noma'lumlarning bir xil qiymatlaridagina o'zaro teng bo'lishini ko'rsatish mumkin.

2. Tengsizliklarni tenglamaga aylantirish. n noma'lumli

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad (1.29)$$

chiziqli tengsizlikni qaraymiz. Bu tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun uning kichik tomoniga nomanfiy o'zgaruvchini, ya'ni $x_{n+1} \geq 0$ ni qo'shamiz.

Natijada $n+1$ noma'lumli chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \quad (1.30)$$

(1.29) tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun qo'shilgan x_{n+1} o'zgaruvchi qo'shimcha o'zgaruvchi deb ataladi.

(1.29) tengsizlik va (1.30) tenglamaning yechimlari bir xil ekanligi quyidagi teoremda ko'rsatilgan.

1-teorema. Berilgan (1.29) tengsizlikning har bir $X=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ yechimiga (1.30) tenglamaning faqat bitta

$$Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

yechimi mos keladi va aksincha, (1.30) tenglamaning har bir Y_0 yechimiga (1.29) tengsizlikning faqat bitta X_0 yechimi mos keladi.

Teorema isboti. Faraz qilaylik, X_0 (1.29) tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \leq b$ munosabat o'rinli bo'ladi. Tengsizlikning chap tomonini o'ng tomonga o'tkazib hosil bo'lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz

$$0 \leq b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}.$$

Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektorni (1.30) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - \dots - a_n\alpha_n) = b.$$

Endi agar Y_0 (1.30) tenglamani qanoatlantirsa, u holda u (1.29) tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b, \\ \alpha_{n+1} \geq 0.$$

Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \geq 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \leq b$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ (1.29) tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo'l bilan chiziqli dasturlash masalasining cheklamalaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish kerak. Masalan, agar chiziqli dasturlash masalasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (1.31)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.32)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1.33)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar $Y = C'X$ ga 0 koeffitsient bilan kiritiladi. Natijada berilgan (1.31)-(1.33) masala quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (1.34)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (1.35)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \max \quad (1.36)$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \quad (1.37)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.38)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (1.39)$$

ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun qo'shimcha $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$ o'zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (1.40)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (1.41)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (1.42)$$

Endi chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining xossalari bilan tanishamiz. Buning uchun eng avval qavariq kombinatsiya va qavariq to'plam tushunchasini eslatib o'tamiz.

5-ta'rif. A_1, A_2, \dots, A_n vektorlarning qavariq kombinatsiyasi deb

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad i = \overline{1, n}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

vektorga aytiladi. n - o'lchovli fazodagi har bir $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorga koordinatalari (a_1, a_2, \dots, a_n) bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorni n - o'lchovli fazodagi nuqta deb qaraymiz.

6-ta'rif. Agar n - o'lchovli vektor fazodagi C to'plam o'zining ixtiyoriy A_1 va A_2 nuqtalari bilan bir qatorda bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$) nuqtani ham o'z ichiga olsa, ya'ni $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, bu to'plam qavariq to'plam deb ataladi.

2-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Isboti. Chiziqli dasturlash masalasining ixtiyoriy ikkita mumkin bo'lgan rejasining qavariq kombinatsiyasi ham reja ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 berilgan chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalari bo'lsin. U holda

$$AX_1 = P_0, \quad X_1 \geq 0, \quad (1.43)$$

$$\text{va} \quad AX_2 = P_0, \quad X_2 \geq 0, \quad (1.44)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Endi x_1 va x_2 rejalarining qavariq kombinatsiyasini tuzamiz.

$$X = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

hamda uni reja ekanligini ko'rsatamiz:

$$AX = A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2$$

Endi (1.43) va (1.44) tenglamalarni inobatga olib topamiz:

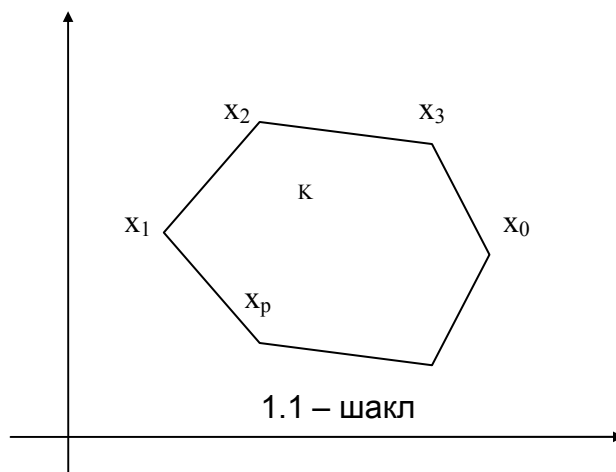
$$AX = \alpha P_0 + (1 - \alpha)P_0 = P_0$$

Bu munosabat X vektor ham reja ekanligini ko'rsatadi.

3-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining maqsad funktsiyasi o'zining optimal qiymatiga shu masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamning

burchak nuqtasida erishadi. Agar chiziqli funktsiya K qavariq to'plamning birdan ortiq burchak nuqtasida optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham o'zining optimal qiymatiga erishadi.

Isboti. Deylik, X_0 nuqta chiziqli funktsiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqta bo'lsin. Agar X_0 nuqta burchak nuqta bo'lsa, u holda teorema o'z-o'zidan isbot qilingan bo'ladi. Faraz qilaylik, X_0 nuqta K qavariq to'plamning ichki nuqtasi, x_1, x_2, \dots, x_r nuqtalar esa uning burchak nuqtalari bo'lsin (1.1-shakl):



X_0 nuqta chiziqli funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqta bo'lganligi sababli

$$Y(X_0) \leq Y(X)$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in K$ uchun o'rinli bo'ladi. X_0 nuqta ichki nuqta bo'lganligi uchun uni burchak nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin:

$$X_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, p}) \quad (1.45)$$

$Y(X)$ chiziqli funktsional bo'lganligi sababli

$$Y(X_0) = Y(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_r X_r) = \alpha_1 Y(X_1) + \alpha_2 Y(X_2) + \dots + \alpha_p Y(X_p) = m, \quad (1.46)$$

bu erda m har qanday $X \in K$ uchun funktsiyaning minimal qiymati.

(1.46) tenglikdagi har bir $Y(X_i)$ ni

$$\min Y(X_i) = Y(X_m)$$

bilan almashtirib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$Y(X_0) \geq \alpha_1 Y(X_m) + \alpha_2 Y(X_m) + \dots + \alpha_p Y(X_m) =$$

$$Y(X_m)(\alpha_p + \dots + \alpha_p) = Y(X_m) \quad ,$$

ya'ni

$$Y(X_0) \geq Y(X_m).$$

Bu tengsizlikni (1.46) tenglik bilan solishtirib quyidagiga ega bo'lamiz

$$Y(X_0) = Y(X_m) = m.$$

Demak, X_m burchak nuqtada chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga erishar ekan.

Endi maqsad funktsiya o'zining minimal qiymatiga X_1, X_2, \dots, X_r nuqtalarda erishsin, ya'ni

$$Y(X_1) = Y(X_2) = \dots = Y(X_r) = m$$

shart o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan X nuqtani qaraymiz.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_r X_r$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, p}),$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

U holda

$$Y(X) = Y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r) = \alpha_1 Y(X_1) + \alpha_2 Y(X_2) + \dots + \alpha_p Y(X_p) = m (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r) = m$$

Demak, maqsad funktsiya X nuqtada ham minimum qiymatga erishar ekan. Shu bilan teorema isbot qilindi.

4-teorema. Agar k ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_1, P_2, \dots, P_k vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_k x_k = R_0 \quad (1.47)$$

tenglik barcha $x_i \geq 0$ lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

vektor K qavariq to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Ma'lumki (1.47) tenglikni qanoatlantiruvchi nomanfiy koordinatali $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ vektor chiziqli dasturlash masalasining rejasi bo'ladi. Deylik X burchak nuqta bo'lmasin. U holda X rejani X_1 va X_2 burchak nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin, ya'ni

$$X = \alpha_1 X_1 + (1 - \alpha_1) X_2,$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq 1.$$

X vektorning $n-k$ ta komponentasi nolga teng bo'lib, X_1 va X_2 vektorlarning koordinatalari musbat va $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli X_1 va X_2 vektorlarning ham $n-k$ ta koordinatasi noldan iborat bo'ladi, ya'ni

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, 0 \dots 0),$$

$$X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, 0 \dots 0).$$

X_1 va X_2 vektorlar chiziqli dasturlash masalasining rejalari, shuning uchun

$$AX_1 = P_0,$$

$$AX_2 = P_0$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu shartlarni quyidagi formada ,zamiz:

$$\begin{aligned} P_1 x_1^{(1)} + P_2 x_2^{(1)} + \dots + P_k x_k^{(1)} &= P_0 \\ P_1 x_1^{(2)} + P_2 x_2^{(2)} + \dots + P_k x_k^{(2)} &= P_0, \end{aligned}$$

Ma'lumki, P_0 vektorning o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_1, P_2, \dots, P_k vektorlar orqali faqat bitta yilmasini topish mumkin. Shuning uchun

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$$

Demak, X vektorni K to'plamning ixtiyoriy ikkita nuqtasining qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin emas ekan. Bundan X nuqta K to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

5-teorema. Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ burchak nuqta bo'lsa, u holda musbat x_i larga mos keluvchi vektorlar o'zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasini tashkil qiladi (teoremani isbotsiz qabul qilamiz).

Yuqorida keltirilgan teoremlardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. K to'plamning har bir burchak nuqtasiga P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar sistemasidan m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasi mos keladi.

2-xulosa. $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ K to'plamning burchak nuqtasi bo'lishi uchun musbat x_i koordinatalar

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = P_0$$

yoyilmada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_i vektorlarning koeffitsientlaridan iborat bo'lishi zarur va etarli.

3-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasi bazis yechimlaridan tashkil topgan to'plam K qavariq to'plamning burchak nuqtalar to'plamiga mos keladi va aksincha, har bir bazis echim K to'plamning biror burchak nuqtasiga mos keladi.

4-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini K to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

3-§. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Grafik usul. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish

Quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (1.48)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (1.49)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min). \quad (1.50)$$

Ushbu chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma'lumki, n ta tartiblashgan x_1, x_2, \dots, x_n sonlar n -ligi (birlashmasi) n o'lchovli fazoning nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun (1.48)-(1.50) chiziqli dasturlash masalasining rejasini n o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma'lumki, bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Qavariq to'plam chegaralangan (qavariq ko'pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko'p qirrali

soha) bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin.

Koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a$$

tenglamani qanoatlantiruvchi (x_1, x_2, \dots, x_n) nuqtalar to'plami gipertekislik deb ataladi. Shu sababli

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = Y$$

ko'rinishida yozilgan maqsad funktsiyani Y ning turli qiymatlariga mos keluvchi o'zaro parallel **gipertekisliklar** oilasi deb qarash mumkin.

Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida Y funktsiya bir xil qiymatni qabul qiladi (demak, o'zgarmas sathda saqlanadi). Shuning uchun ular «sath tekisliklari» deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha ta'siflash mumkin:

(1.48) va (1.49) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funktsiyaga maksimum(minimum) qiymat beruvchi (1.50) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo'lgan gipertekislik o'tsin. Jumladan, $n=2$ da (1.48)-(1.50) masala quyidagicha talqin qilinadi:

(1.48)-(1.49) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funktsiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi va (1.50) sath chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan chiziq o'tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda 2-§ da tanishgan chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalari tayanib masalani ba'zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases} \quad (1.51)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (1.52)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max. \quad (1.53)$$

Faraz qilaylik, (1.51) sistema (1.52) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo'lsin. hamda yechimlardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (1.51) va (1.52) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad (i=1, \dots, m)$$

$x_1=0, x_2=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.54)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarim tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to'g'ri chiziqning qaysi tomonida yotishini aniqlash uchun $O(0;0)$ koordinata boshini mo'ljall nuqta deb qarash mumkin. Agar $x_1=0, x_2=0$ qiymatlarni (1.54) tengsizlikka qo'yganda $0 \leq b_i$

tengsizlik hosil bo'lsa, u holda qidirilayotgan yarim tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to'g'ri chiziqning ostida (koordinata boshi tomonida) yotadi, aks holda u bu to'g'ri chiziqning yuqorisida yotuvchi yarim tekislikdan iborat bo'ladi.

Chiziqli funktsiya (1.51) ham ma'lum bir o'zgarma $C_0 = \text{const}$ qiymatda

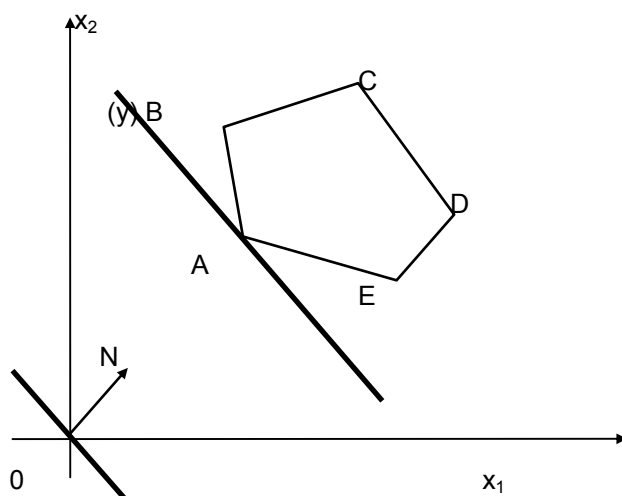
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

sath to'g'ri chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, \quad x_1=0, x_2=0,$$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik bu ko'pburchak ABCDE beshburchakdan iborat bo'lsin (1.2-shakl)



1.2 - шакл

Chiziqli funktsiyani ixtiyoriy o'zgarma C_0 songa teng deb olamiz.

Natijada

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0 = \text{const}$$

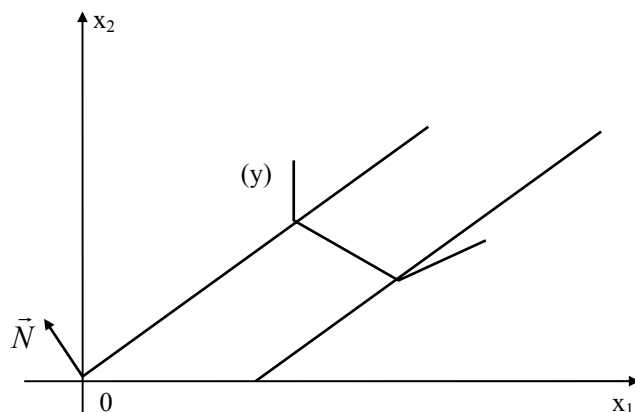
to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. bu to'g'ri chiziqni $\vec{N}(c_1, c_2)$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishida o'ziga parallel surib borib qavariq ko'pburchakning chiziqli funktsiyaga eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz.

1-shakldan ko'rinib turibdiki, chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning A nuqtasida erishadi. S nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $A(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funktsiyasiga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari AB va AE to'g'ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar orqali aniqlanadi.

Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin.

1-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq \vec{N} vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na

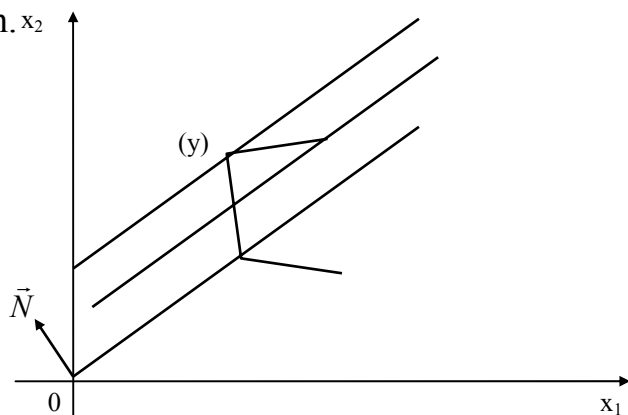
minimal, na maksimal qiymatga erishadi. Bu holda chiziqli funktsiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi (1.3-shakl)



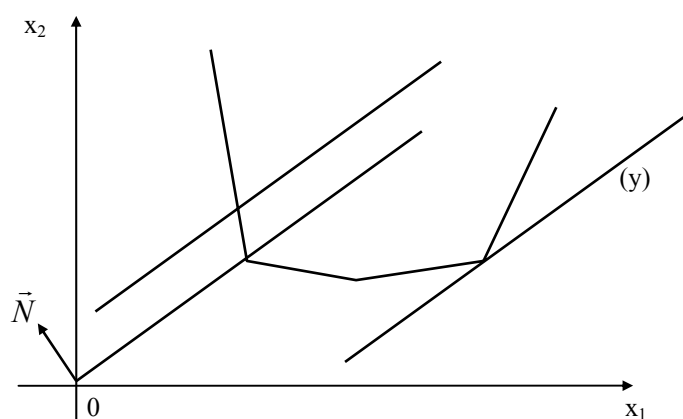
1.3 - шакл

$$s_1x_1 + s_2x_2 = S_0$$

to'g'ri chiziq \vec{N} vektor bo'yicha siljib borib qavariq ko'pburchakning birorta burchak nuqtasida o'zining minimal yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funktsiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (1.4-shakl) yoki quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan (1.5-shakl) bo'lishi mumkin.



1.4 - шакл



1.5 - шакл

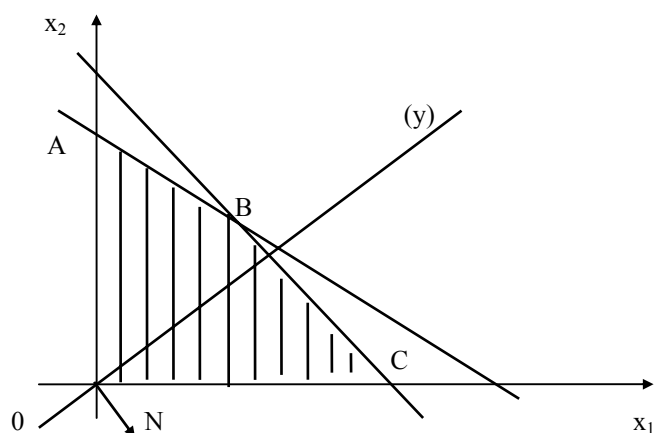
1-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ Y &= 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 12 \quad (L_1), \\ 3x_1 + 4x_2 &= 12 \quad (L_2), \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

chiziqlar yasaymiz (1.6-shakl).



1.6 - шакл

Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechim shtrixlangan OABC to'rtburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan $\vec{N}=(2,5)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

tenglama orqali ifodalanadi. Uni \vec{N} vektor yo'nalishida o'ziga parallel siljitib boramiz. Natijada chiziqli funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi $C(3;0)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari $x_1=3$, $x_2=0$ masalaning optimal yechimi bo'ladi va $Y_{max}=2 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 6$ bo'ladi.

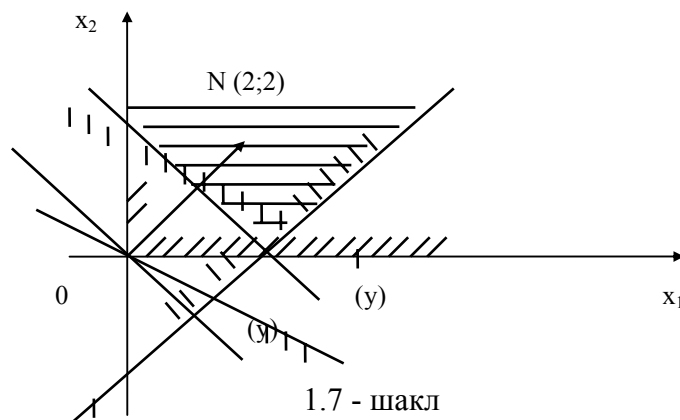
2-misol. Berilgan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ Y &= 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Yechish. Yechim ko'pburchagini hosil qilamiz. Uning uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

to'g'ri chiziqlar yasaymiz (1.7-shakl).



Shakldan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{N} (2:2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu chiziq

$$2x_1 + 2x_2 = const$$

tenglama orqali ifodalanadi.

Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funktsiyaning maksimum qiymati yuqoridan chegaralanmagan ekan.

3-misol. Masalani grafik usulda yeching.

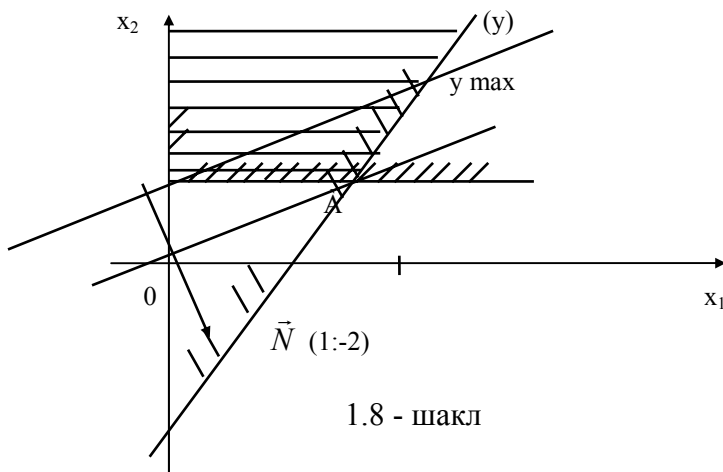
$$2x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 1,$$

$$Y = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max.$$

Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo'lamiz (1.8-shakl):



Shakldan ko'rinadiki, yechimlar to'plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u A nuqta koordinatalaridan iborat.

Grafik usul yordami bilan iqtisodiy masalalarni yechish va yechimni tahlil qilish mumkin. Buni quyidagi iqtisodiy masala misolida ko'ramiz.

Deylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom ashyodan foydalanilsin. Xom ashyolarning zahirasi berilgan va ular 6 va 8 birlikni, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikni tashkil qiladi va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta.

Har bir bo'yoq birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xom ashyolar miqdori (normasi) hamda korxonaning har bir bo'yoqdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyolar bo'yoqlar	1	2	Bo'yoqlar bahosi (shartli birlik)
I	1	2	3
II	2	1	2
Xom ashyo zahirasi(t)	6	8	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi:

Har bir bo'yoqdan qancha ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi hamda talab bo'yicha shartlar ham bajariladi?

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz: x_1 – ishlab chiqarishga rejalashtirilgan I – bo'yoq miqdori; x_2 – II – bo'yoq miqdori;

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \quad (2)$$

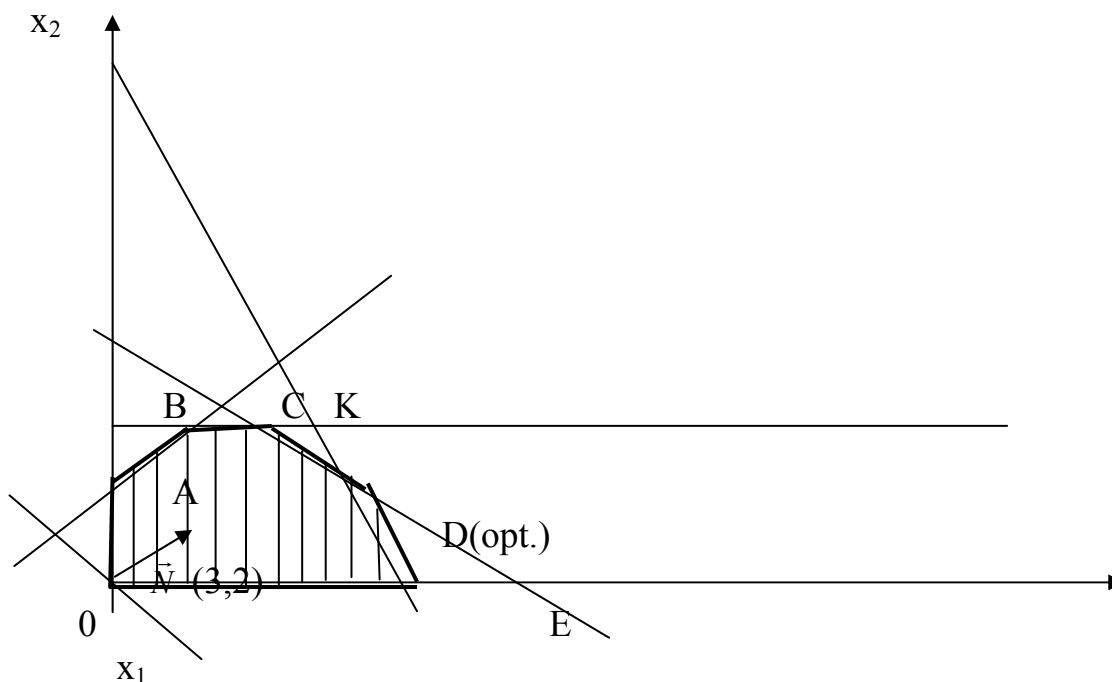
$$-x_1 + x_2 \leq 1, \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2, \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad (5)$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \quad (6)$$

Masalani grafik usulda yechamiz hamda $D\left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



1.9 – shakl.

Demak, optimal yechim quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = 3\frac{1}{3}; \quad x_2 = 1\frac{1}{3}; \quad Y_{\max} = 12\frac{2}{3}.$$

Bundan ko'rinadiki, korxona birinchi bo'yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladgan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo'ladi.

Endi grafik yordamida iqtisodiy masala yechimini tahlil qilish mumkin ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun optimal D nuqtaga qaraymiz.

Bu nuqta $2x_1+x_2=8$ va $x_1+2x_2=6$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi ekanligidan berilgan iqtisodiy masalaning (1) va (2) chegaralovchi shartlari D nuqtada tenglamaga aylanishini ko'rsatadi. Bu esa bo'yoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob (defitsit) ekanligini ko'rsatadi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan shartlar aktiv shartlar. Unga bog'liq bo'lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko'rayotgan masalada mahsulotlarga bo'lgan talabga qo'yilgan $x_1+x_2 \leq 1$ va $x_2 \leq 2$ shartlar optimal nuqtaga bog'liq emasligini va shu sababi bu shartlar passiv shartlar ekanligini aniqlaymiz.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo'lmaydi va ularning ma'lum darajada o'zgarishi optimal yechimga ta'sir qilmaydi. Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o'zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasi bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rish uchun uni 7 ga teng deb olamiz. U holda CD kesma o'ziga parallel ravishda yuqoriga ko'tariladi va DCK uchburchak hosil bo'ladi. Endi K nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_2=2$ va $2x_1+x_2=8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning (2) va (4) shartlari aktiv shartlarga, (1) va (3) shartlari esa passiv shartlarga aylanadi. K nuqtaning koordinatalari $x_2=2$, $x_1=3$. Demak, yangi optimal yechim

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad Y_{max} = 13$$

bo'ladi.

Optimal yechimda 1-xom ashyoga doir (1) chegaraviy shart

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

ga teng bo'ladi. Demak, 1-xom ashyoning eng ko'p mumkin bo'lgan zahirasi 7 ga teng bo'lishi kerakligini ko'rsatadi.

Xuddi shunday yo'l bilan 2-xom ashyolar bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo'lmagan xom ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan darajada, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi 1.9-shaklda BC kesma $x_2 = 2$ chiziqli, ya'ni masalaing 4 shartini ifodalaydi. Bu - passiv shart. Maqsad funktsiya qiymatini o'zgar-tirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun BC kesmani o'ziga parallel pastga to D nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = 1\frac{1}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $1\frac{1}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo'l bilan masalaning optimal yechimiga ta'sir etmasdan uning (3) - passiv shartning o'ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko'rsatish

mumkin.

Tayanch so'z va iboralar.

Dasturlash, chiziqli dasturlash, model, matematik model, chegaraviy shartlar, maqsad funktsiya, joiz reja, bazis yechim (reja), aynigan(xos) bazis reja, aynimagan bazis reja, optimal reja, qo'shimcha o'zgaruvchi, vektorlarning qavariq kombinatsiyasi, qavariq to'plam, qavariq to'plamning burchak nuqtasi, gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, sath tekisliklari, aktiv shartlar, passiv shartlar, yechimlar ko'pburchagi.

Nazorat savollari

1. Matematik dasturlashning predmeti nimadan iborat?
2. Iqtisodiy masalaning matematik modeli nima va u qanday tuziladi?
3. Chiziqli dasturlash masalasining chegaralovchi shartlari qanday ko'rinishda bo'lishi mumkin?
4. Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
5. «Iste'mol savati» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
6. «Optimal bichish» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
7. Umumiy ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasini qanday shakllarda ifodalash mumkin?
8. Chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi nima?
9. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimini ta'riflang.
10. Aynigan va aynimagan bazis yechimlar nima?
11. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimi nima?
12. Chiziqli dasturlash masalasida qanday teng kuchli almash-tirishlarni bajarish mumkin?
13. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlaridan tashkil topgan to'plam qanday to'plam bo'ladi?
14. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakning burchak nuqtasi bilan bazis yechim orasida qanday bog'lanish bor?
15. Maqsad funktsiya o'zining optimal qiymatiga qanday nuqtada erishadi?
16. Chiziqli dasturlash masalasining joiz rejasining mavjud emaslik shartlari qanday?
17. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
18. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining qanday xossalriga asosan grafik usulni qo'llash mumkin?
19. Chiziqli dasturlash masalasi rejalaridan tashkil topgan to'plam qanday bo'lishi mumkin?

20. Qanday holda chiziqli dasturlash masalasi birdan ortiq optimal yechimga ega bo'lishi mumkin?

21. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechganda xom ashyolarning kamyob yoki kamyob emasligini qanday aniqlash mumkin?

22. Passiv va aktiv chegaralovchi shartlar nima?

23. Aktiv shartlarni (kamyob xom ashyolarni) bir birlikka oshirganda optimal yechim qanday o'zgaradi?

24. Optimal yechimni o'zgartirmagan holda passiv shartlarni qanchalik o'zgartirish mumkin?

Masalalar

1. Mebel fabrikasida standart o'lchamdagi fanerlardan mos ravishda 24, 31 va 18 dona 3 xil buyumlar uchun tayyor qismlar qirqilishi kerak. Har bir faner tayyor qismlarga ikki xil usulda qirqilishi mumkin. Quyidagi jadvalda har bir qirqish usulida olinadigan tayyor qismlar soni va bunda hosil bo'ladigan chiqindilar miqdori berilgan.

Tayyor qism turlari	qirqish usulida hosil bo'ladigan tayyor qismlar soni (dona)	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Chiqindilar miqdori (sm ²)	12	16

Zarur miqdordan kam bo'lmagan tayyor qismlar tayyorlash va eng kam chiqindiga ega bo'lishi uchun fanerlardan nechtasini qaysi usulda qirqish kerak?

2. Ikki xil mahsulotni sotishda 4 xil resurslardan foydalaniladi. Mahsulotlar birligini sotish uchun sarf qilinadigan turli resurslar miqdori(me'yori) hamda har bir resursning zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	har bir mahsulot birligiga sarf qilinadigan resurslar miqdori (me'yori)		Resurslar zahirasi
	I-mahsulot	II-mahsulot	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12
Mahsulot birligini sotishdan olinadigan daromad	2	3	

Chegaralangan resurslardan foydalanib savdo korxonasining daroma-dini maksimallashtiruvchi mahsulotlarni sotish rejasini toping.

3. Firma o'z mahsulotini radio va televizion tarmoq orqali reklama qilish imkoniyatiga ega. Firma 1 oyda reklama uchun 1000 doll.miqdorida pul ajratgan. Radio orqali reklamani har bir minutiga 5 doll., televizor orqali reklamani har minutiga esa 100 doll., sarf qilinadi. Firmaning radio reklamani telereklamaga nisbatan 2 marta ko'proq tashkil qilish hoxishi bor. Oldingi yillardagi tajriba shu ni ko'rsatadiki, bir minutli telereklama mahsulot sotilishini radio reklamaga nisbatan 25 marta ko'proq ta'minlaydi.

Firmaning har oyda reklama uchun ajratiladigan mablag'ini radio va telereklama o'rtasida optimal taqsimlang.

4. Grafik usulda quyidagi tengsizliklar sistemasining yechimlar ko'pburchagini toping.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\4x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\-x_1 + x_2 &\leq 1, \\x_1 + x_2 &\leq 6 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0,\end{aligned}$$

5. Masalani grafik usulda yeching hamda undagi passiv va aktiv shartlarni aniqlang.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1, \\3x_1 - x_2 &\leq 6 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \\Y &= 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \max\end{aligned}$$

6. Masalani grafik usulda yeching va masad funktsiyaning optimal qiymatini o'zgartirmagan holda masala cheklamalarini qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini ko'rsating.

$$\begin{aligned}2x_1 + 7x_2 &\leq 21, \\7x_1 + 2x_2 &\leq 49 \\x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \\Y &= 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

II BOB. CHIZIQLI DASTURLASH MASALASINI ALGEBRAIK USULLAR BILAN YECHISH

1- §. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimi va uni toish usullari

Vektor formada yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0, \quad (2.1)$$

$$X \geq 0, \quad (2.2)$$

$$Y = CX \rightarrow \min. \quad (2.3)$$

Bu masala chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishidan iborat. Agar masala bunday ko'rinishda berilmagan bo'lsa, u holda I bobda ko'rsatilgan chiziqli almashtirishlarni bajarib uni shunday ko'rinishga keltirish mumkin. Berilgan (2.1)-(2.3) masalaning optimal yechimi mavjud bo'lishi uchun (2.1) sistema birgalikda hamda bittadan ortiq nomanfiy yechimga ega bo'lishi va demak, (2.1) sistemaning r rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi kerak, ya'ni $r < n$. Bu erda $r > n$ ma'noga ega emasligini hamda $r = n$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lishi va optimal yechimni tanlash uchun imkoniyat bo'lmasligini aytib o'tish o'rinli. Deylik, $r = m$ ($m < n$) tenglik o'rinli bo'lsin. U holda n ta P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar sistemasi m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasini o'z ichiga oladi. Bunday vektorlar sistemasi **bazis** deb ataladi. Berilgan P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar sistemasida bir necha bazis mavjud bo'lishi mumkin, lekin ularning umumiy soni C_n^m dan oshmaydi, hamda har bir bazis m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasidan iborat bo'ladi.

Bazisga kiruvchi vektorlar **bazis vektorlar**, ularga mos keluvchi o'zgaruvchilar esa **bazis o'zgaruvchilar** bo'lishini I bobda ko'rgan edik.

Deylik, P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar tarkibidagi bitta bazis birinchi m ta P_1, P_2, \dots, P_m vektorlarni o'z ichiga olsin. Bu holda bu vektorlarga mos keluvchi x_1, x_2, \dots, x_m o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar hamda $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar esa erkli o'zgaruvchilar bo'ladi. Bunday farazda (2.1) sistemani Jordan-Gauss usulini qo'llab quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij}x_{m+j}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.4)$$

Bu tenglik x_1, x_2, \dots, x_m bazis o'zgaruvchilarning erkli $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar orqali ifodasini ko'rsatadi. (2.4) ko'rinishdagi ifoda (2.1) sistemaning **umumiy echi**mi yoki uning x_1, x_2, \dots, x_m bazisga nisbatan **aniqlangan formasi** deb ataladi. (2.4) ko'rinishdagi sistema X - tenglamalar sistemasi deb ham ataladi.

Agar P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar sistemasi boshqa bazisga ham ega bo'lsa, u holda (2.1) sistemani boshqa bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan formasini ham topish mumkin.

(2.4) tenglikdagi x_{m+j} ($j=1,2,\dots,n$) erkli o'zgaruvchilarga aniq qiymatlar berib, bazis o'zgaruvchilarning mos qiymatlarini topish va demak, berilgan (2.1) sistemaning aniq bir xususiy yechimini topish mumkin.

Erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat berib topiladigan xususiy yechim **bazis yechim** deb ataladi. (2.4) sistemaga mos keluvchi bazis yechim:

$$x_1=b_1, x_2=b_2, \dots, x_m=b_m, x_{m+1}=0, x_{m+2}=0, \dots, x_n=0$$

yoki

$$X=(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0).$$

Berilgan n ta P_1, P_2, \dots, P_n vektorlar sistemasidagi bazislar soni C_n^m dan oshmasligini va har bir bazisga aniq bir bazis echim mos kelishini nazarga olib, (2.1) sistemadagi bazis echimlar soni C_n^m dan oshmaydi deb xulosa qilish mumkin.

Agar (2.1) sistemaning bazis yechimidagi barcha o'zgaruvchilar nomanfiy qiymatlarni qabul qilsa, bunday bazis yechim (2.1) – (2.3) masalaning **bazis yechimi** bo'ladi. Matematik dasturlashda bazis yechim **bazis reja** deb ham ataladi (bazis reja haqida ayrim tushuncha va tasdiqlar I bobda keltirilgan).

Bazis reja $r=m$ tadan ortiq musbat komponentalarni o'z ichiga ola olmaydi. Agar undagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, bunday bazis reja **aynimagan reja**, agar m dan kichik bo'lsa, u **aynigan bazis reja** bo'ladi.

Agar (2.1)-(2.3) chiziqli dasturlash masalasining yechimlar (rejalar) to'plami bo'sh bo'lmasa, u holda bu rejalar ichida kamida bittasi bazis reja bo'lishini isbotlash mumkin.

Endi chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimini topish usullari bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasiga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.6)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (2.7)$$

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, agar bu masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda uning kamida bitta bazis yechimi mavjud bo'ladi va u (2.5) sistemaning nomanfiy yechimlaridan biri bo'ladi. Demak, berilgan masalaning aniq bir bazis rejasini topish uchun (2.5) sistemaning nomanfiy bazis yechimini topish kerak.

$$\min_{a_{ik} < 0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{b_{lk}}.$$

shartni qanoatlantiruvchi l -tenglamadan ajratilib, yangi sistemaning birinchi tenglamasi tuziladi. Har bir tenglamaga mos keluvchi $b_i/|a_{ik}|$ ($a_{ik} < 0$) nisbat i -tenglamada x_k noma'lum bo'yicha hisoblangan aniqlovchi koeffitsient (A.K.) deb ataladi.

7. Topilgan x_k noma'lumning qiymatini eski sistemaning qolgan tenglamalariga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun bu tenglamalarga qo'shimcha tenglama tuziladi.

8. Har bir tenglamani, shu jumladan nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemaning qolgan tenglamalari va nazorat tenglamasi hosil qilinadi. Agar hosil bo'lgan yangi sistema uchun yuqoridagi a) va b) mavjud emaslik mezonlari bajarilmasa, yuqoridagi 4-8 punktlarda qilingan ishlar yana takrorlanadi. Shunday yo'l bilan sistemani yechish hamma **0**-tenglamalar **x**-tenglamaga (noma'lumi ajratilgan tenglamaga) aylanguncha, ya'ni nazorat tenglama **0=0** ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'ngra sistemaning nomanfiy yechimi (haqiqiy yoki bazis) yoziladi.

Hosil bo'lgan x- tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin deb faraz qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^1 + a_{1m+1}^1 x_{m+1} + a_{1m+2}^1 x_{m+2} + \dots + a_{1n}^1 x_n, \\ x_2 = b_2^1 + a_{2m+1}^1 x_{m+1} + a_{2m+2}^1 x_{m+2} + \dots + a_{2n}^1 x_n, \\ \text{-----} \\ x_m = b_m^1 + a_{mm+1}^1 x_{m+1} + a_{mm+2}^1 x_{m+2} + \dots + a_{mn}^1 x_n, \end{cases} \quad (2.9)$$

bu erda x_1, x_2, \dots, x_m – bazis o'zgaruvchilar, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – erkli o'zgaruvchilar. Erkli o'zgaruvchilarni 0 ga tenglab berilgan sistemaning nomanfiy (haqiqiy yoki bazis) yechimi yoziladi:

$$X = (b_1^1, b_2^1, \dots, b_m^1, 0, 0, \dots, 0) \quad (2.10)$$

1-misol. Sistemaning nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasini 0-tenglamalar sistemasiga aylantiramiz va nazorat tenglama tuzamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4, \\ 0 = 2 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4, \\ -2x_2 = -1 + x_1 - x_3 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4, \\ -5x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \\ \text{h.m.} 0 = 8 - x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4, \\ -9x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4, \end{array} \right. \begin{array}{l} 1/2 \\ 2/2=1 \\ 5/5=1 \end{array}$$

Nazorat tenglamadan eng kichik koeffitsientli noma'lumni, ya'ni x_2 ni tanlaymiz. 0-tenglamalar sistemasidagi har bir tenglama uchun $b_i / |a_{i2}|$ ($a_{i2} < 0$) nisbatlarni, ya'ni aniqlovchi koeffitsientlarni hisoblaymiz.

Aniqlovchi koeffitsientlar ichida eng kichigiga mos kelgan 1-tenglamadan x_2 ni ajratib x – tenglamaga aylantiramiz:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Bu tenglamadan foydalanib eski sistemaning har bir qolgan tenglamalariga hamda nazorat tenglamaga qo'shimcha tenglama tuzamiz va ularni mos tenglamalar tagiga yozamiz.

Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ 0 = 1 + 2x_1 - 4x_3 - 2x_4, \\ 0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{7}{4}x_1 + \frac{7}{4}x_4, \\ \text{h.m.} \quad 0 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{15}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \\ -\frac{15}{2}x_3 = -\frac{15}{8} - \frac{15}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_4, \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ 1/4 \\ 5/7 \\ \text{---} \end{array}$$

Yangi sistemaning nazorat tenglamasidan eng kichik koeffitsientli x_3 noma'lumni tanlaymiz va sistemadagi tenglamalarda bu noma'lum uchun aniqlovchi koeffitsient hisoblaymiz. Aniqlovchi koeffitsientlar ichida eng kichigi 2-tenglamaga mos kelgani uchun x_3 ni 2-tenglamadan ajratib x -tenglamaga aylantiramiz.

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$$

Topilgan x_3 ning qiymatini boshqa tenglamalarga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun ularga qo'shimcha tenglamalar tuzamiz. Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz.

Endi nazorat tenglamadan x_1 ni tanlab uning ustida yuqoridagi ishlarni bajarib quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{4} - 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ \begin{cases} 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_2 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} - \\ \\ 5 / 2 \\ 13 / 2 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{h.m.} \quad 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_2 + \frac{1}{4}x_4, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{2} - 4x_2 - x_4, \\ x_3 = \frac{3}{2} - 2x_2 - x_4, \\ 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4, \\ \text{h.m.} \quad 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4, \end{array} \right.$$

Hosil bo'lgan yangi sistemada b) mavjud emaslik sharti bajariladi. 3-tenglamada ozod had bilan noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar bir xil ishorali bo'lganligi sababli sistema nomanfiy yechimga ega bo'lmaydi.

Yuqoridagi usul bilan chiziqli tengsizliklar sistemasining ham nomanfiy yechimini topish mumkin. Lekin bunda tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{m+1} \geq 0$,

$x_{m+2} \geq 0, \dots, x_{m+n} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shib tenglamalar sistemasini hosil qilish kerak bo'ladi.

2-misol. Berilgan tengsizliklar sistemasining nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi birinchi tengsizlikga x_5 ni, ikkinchisiga x_6 ni qo'shib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yuqoridagi algoritm asosida yechamiz.

$$I \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ 0 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_6, \\ -2x_1 = -4 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5, \\ \text{h.m.} 0 = 7 - 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 - x_6, \\ -3x_1 = -6 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} A.K.(x_1) \\ 2 \\ 5/2 \\ \\ \end{array} \right|$$

$$II \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ 2x_3 = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_4 + \frac{4}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \\ 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ \text{h.m.} 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ -7x_3 = -1 - 3x_2 - 3x_4 - 2x_5 + x_6, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} A.K.(x_3) \\ \\ 1/7 \\ \end{array} \right|$$

$$III \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6, \\ x_1 = \frac{16}{7} - \frac{8}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{array} \right.$$

Javob. Bazis echim: $x_1 = 16/7, x_2 = 0, x_3 = 1/7,$
 $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0.$

Deylik, kononik ko'rinishdagi (2.5)-(2.7) chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish kerak bo'lsin. Masalaning optimal yechimi uning bazis yechimlaridan biri bo'lib, unda (2.7) maqsad funktsiya minimal qiymatga erishadi. Demak, optimal yechimni bazis yechimlar ichidan qidirish kerak.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_{10} + b_{11}x_{m+1} + b_{12}x_{m+2} + \dots + b_{1n-m}x_n, \\ x_2 = b_{20} + b_{21}x_{m+1} + b_{22}x_{m+2} + \dots + b_{2n-m}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_m = b_{m0} + b_{m1}x_{m+1} + b_{m2}x_{m+2} + \dots + b_{mn-m}x_n, \end{array} \right. \quad (2.11)$$
$$Y=c_{00}+\sum_{j=1}^{n-m}c_{0j}x_{m+j} \quad (2.12)$$

Topilgan bazis yechimni optimal yechim bo'lishini tekshirish hamda, agar bu bazis yechim optimal yechim bo'lmasa, boshqa bazis yechimga o'tish qoidasi bilan tanishish uchun (2.11) sistemani va (2.12) funktsiyani quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz.

Bazis o'zgaruv chilar	B_0	Erkli o'zgaruvchilar					
		x_{m+1}	x_{m+2}	...	x_{m+s}	...	x_n
x_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	...	b_{1s}	...	b_{1n-m}
x_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}	...	b_{2n-m}
...
x_k	b_{k0}	b_{k1}	b_{k2}	...	b_{ks}	...	b_{kn-m}
...
x_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{ms}	...	b_{mn-m}
Y	c_{00}	c_{01}	c_{02}	...	c_{0s}	...	c_{0n-m}

Bunday jadval **simpleks* jadval** deb ataladi. Simpleks jadvalning bir necha turlari mavjud bo'lib, ularning ba'zilar bilan keyingi paragraflarda tanishamiz.

Agar V_0 vektorning barcha elementlari uchun

$$b_{i0} > 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda

$$X_0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$$

vektor berilgan masalaning bazis rejalaridan biri bo'ladi. Bu rejaga maqsad funktsiyaning

$$Y(X_0) = c_{00}$$

qiymati mos keladi. Agar (2.12) yoyilmadagi $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n-m}$ elementlarning barchasi nomanfiy bo'lsa, ya'ni

$c_{0j} \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n-m)$ shart o'rinli bo'lsa, u holda topilgan X_0 bazis reja **optimal reja** bo'ladi. Optimal rejadagi maqsad funktsiyaning eng kichik qiymati

$$Y_{\min} = Y(X_0) = c_{00}$$

bo'ladi.

Agar $c_{0j} \quad (j=1, \dots, n-m)$ koeffitsientlardan kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan, ya'ni

$$Y(X_1) \leq Y(X_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi boshqa X_1 bazis reja bilan almashtirish kerak bo'ladi. Bunday jarayonni amalga oshirish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

$$\min_{c_{0j} < 0} c_{0j} = c_{0s}$$

1)

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi x_{m+s} noma'lum tanlanadi, ya'ni bazisga kiritilishi kerak bo'lgan noma'lum belgilanadi. Bu erda ikki xil vaziyat ro'y berishi mumkin:

a) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlarning barchasi musbat, ya'ni $b_{is} \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$). Bunday shart bajarilganda maqsad funktsiya chekli minimum qiymatga ega bo'lmaydi va berilgan masalaning chekli optimal yechimi mavjud bo'lmaydi.

b) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlar ichida kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsin deylik . U holda bazisga x_{m+s} o'zgaruvchi kiritilib,

$$\min_{b_{is} < 0} \frac{b_{i0}}{b_{is}} = \frac{b_{k0}}{b_{ks}} \quad (2.13)$$

shartni qanoatlantiruvchi qatordagi x_k o'zgaruvchi bazisdan chiqariladi. So'ngra topilgan x_{m+s} no'malumning qiymati boshqa tenglamalar va maqsad funksiyasiga qo'yib chiqiladi. Natijada yangi bazis reja topiladi. Agar yangi bazis reja optimal reja bo'lsa, u holda masalani yechish to'xtatiladi. Aks holda, agar imkoniyat bo'lsa, yuqoridagi yo'l bilan yangi bazis yechimga o'tiladi. Bazis rejalarni almashtirish jarayoni berilgan masalaning optimal yechimi topilguncha yoki undagi maqsad funktsiyaning chekli minimum qiymati mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ixtiyoriy chiziqli dasturlash masalasining bazis rejasini topish va bu rejani boshqa bazis rejalarga almashtira borib, optimal yechimni topish jarayonini jadval ko'inishda ham tasvirlash mumkin .Buning uchun :

1) chizikli almashtirishlarni ko'llab, berilgan chiziqli dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishga keltiriladi,

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.16)$$

$$Y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min. \quad (2.17)$$

2) (2.15) sistemaning birgalikda emaslik va uning nomanfiy echimining mavjud emaslik shartlari tekshiriladi (1-§ da tanishgan a) va b) shartlarning bajarilishi tekshiriladi). Agar bu shartlar bajarilmasa (2.15)-(2.17) masala quyidagi cimileks jadval deb ataluvchi jadvalga joydashtiriladi.

Bazis o'zgaruvchilar (X_{baz})	B	X_j					
		x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...
0	b_l	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...
0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
N.T.	S_0	S_1	S_2	...	S_k	...	S_n
Y	c_0	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n

3) jadvalning $m+1$ -qatoriga nazorat tenglama (N.T.) deb ataluvchi va dastlabki m ta tenglamalar yig'indisidan iborat bo'lgan tenglama joydashtirilgan .

Bunda

$$S_0 = \sum_{i=1}^m b_i; \quad S_1 = \sum_{i=1}^m a_{i1}; \quad S_2 = \sum_{i=1}^m a_{i2}; \quad \dots \quad S_n = \sum_{i=1}^m a_{in};$$

Jadvalning oxirgi $m+2$ -qatoriga maqsad funktsiya

$Y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
ko'rinishda yozilgan.

4) nazorat tenglamadagi

$$\max_j S_j = S_k$$

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi no'malum belgilanadi . Belgilangan no'malum

$$\min_{a_{ik} < 0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{|a_{lk}|}$$

shartni qanoatlantiruvchi tenglamadan ajratiladi. So'ngra Jordan-Gauss usulini qo'llab ajratilgan (bazis) o'zgaruvchi boshqa tenglamalardan, N.T. dan va maqsad funktsiyadan yo'q qilinadi, ya'ni simpleks jadval almashtiriladi.

Bu jarayon nazorat tenglama (N.T.) $0=0$ ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'nggi holatda (2.15)-(2.17) sistema bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan shaklga, ya'ni x - tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keladi. Bu holda simpleks jadval 1-jadval ko'rinishga keladi. Demak, bu bosqichda masalaning boshlang'ich bazis yechimi topiladi;

5) topilgan bazis rejada jadvalning Y qatoridagi barcha hadlar $s_{0j} \geq 0$ ($j=1,2,\dots,n-m$) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Agar birorta

$s_{0j} < 0$ ($j=1,2,\dots,m$) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan boshqa rejaga almashtirish uchun yuqorida keltirilgan usul bilan simpleks jadval almashtiriladi;

6) masalaning javobini (optimal yechimni) yozish uchun erkli o'zgaruvchilar 0 ga, bazis o'zgaruvchilar esa ozod hadlarga tenglashtiriladi. Topilgan no'malumlarining qiymatidan foydalanib Y_{\min} , so'ngra (agar zarur bo'lsa) Y_{\max} ning qiymati topiladi.

Misol. Masalaning bazis yechimlaridan birini toping va uni optimal yechimga aylantiring:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}), \\ Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Yechish. Masalaning shartlaridagi tenglamalar sistemasini 0- tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2x_1 - x_2 - x_3, \\ 0 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - x_2 - x_5, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}), \\ Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan masalani quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz va yuqorida tanishgan iteratsion jarayonni bajaramiz.

Baz. o'zgar. (X_{baz})	B	x_j					A. K.
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	2	2	-1	-1	0	0	2
0	2	-1	2	0	-1	0	-
0	5	-1	-1	0	0	-1	-
N.t.	9	0	0	-1	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	2	2	-1	-1	0	0	-
0	2	-1	2	0	-1	0	2
0	5	-1	-1	0	0	-1	5
N.t.	7	-2	1	0	-1	-1	

Y	0	-1	1	0	0	0	
x ₃	6	0	3	-1	-2	0	-
x ₁	2	-1	2	0	-1	0	-
0	3	0	-3	0	1	-1	1
N.t.	3	0	-3	0	1	-1	
Y	-2	0	-1	0	1	0	
x ₃	9	0	0	-1	-1	-1	
x ₁	4	-1	0	0	-1/3	-2/3	
x ₂	1	0	-1	0	1/3	-1/3	
N.t.	0	0	0	0	0	0	
Y	-3	0	0	0	2/3	1/3	

Oxirgi bosqichda topilgan x-tenglamalar sistemasini va Y maqsad funktsiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 9 - x_4 - x_5, \\
 x_1 &= 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5, \\
 x_2 &= 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5, \\
 Y &= -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.
 \end{aligned}$$

Bu erda x_1, x_2, x_3 lar ajratilgan bazis o'zgaruvchilar, x_4 va x_5 lar esa erkli o'zgaruvchilardir. Erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat berib, masalaning bazis rejasini topamiz.

$$X_0 = (4; 1; 9; 0; 0), \quad Y(X_0) = -3.$$

Erkli o'zgaruvchilar maqsad funktsiya Y da musbat koeffitsientlar bilan qatnashgani uchun topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Optimal reja quyidagicha yoziladi:

$$X_{\text{opt}} = (4; 1; 9; 0; 0), \quad Y_{\text{min}} = -3.$$

3- §. Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun simpleks usul (Dantsig usuli)

Dantsig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no'malum (bazis o'zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda,

ChD masalasida m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagani holda bu vektorlar birinchi m ta P_1, P_2, \dots, P_m vektorlardan iborat bo'lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{lm+1}x_{m+1} + \dots + a_{ln}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ x_l + a_{lm+1}x_{m+1} + \dots + a_{ln}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0, \quad (2.19)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (2.20)$$

(2.18) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \dots + P_nx_n = P_0, \quad (2.21)$$

bu erda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \dots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

P_1, P_2, \dots, P_m vektorlar sistemasi m -o'ldirli fazoda o'zaro chiziqli erkin bo'lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular m o'ldirli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi x_1, x_2, \dots, x_m o'zgaruvchilarni «***bazis o'zgaruvchilar***» deb ataladi.

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ yechim hosil bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich joiz yechim bo'ladi. Ushbu yechimga $x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = P_0$ yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi P_1, P_2, \dots, P_m vektorlar o'zaro erkli bo'lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo'ladi.

Dantsig usulida simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	s_1	s_2	\dots	s_m	s_{m+1}	\dots	s_k	\dots	s_n
			P_1	P_2	\dots	P_m	P_{m+1}	\dots	P_k	\dots	P_n
P_1	s_1	b_1	1	0	\dots	0	a_{1m+1}	\dots	a_{1k}	\dots	a_{1n}
P_2	s_2	b_2	0	1	\dots	0	a_{2m+1}	\dots	a_{2k}	\dots	a_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
P_l	s_l	b_l	0	0	\dots	0	a_{lm+1}	\dots	a_{lk}	\dots	a_{ln}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
P_m	s_m	b_m	0	0	\dots	1	a_{mm+1}	\dots	a_{mk}	\dots	a_{mn}
$\Delta_j = Z_j - s_j$	\dots	$U_0 = \sum_{i=1}^m s_i b_{ij}$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	\dots	$\Delta_m = 0$	$\Delta_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_{im+1} s_i - s_{m+1}$	\dots	$\Delta_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} s_i - s_k$	\dots	$\Delta_n = \sum_{i=1}^m a_{in} s_i - s_n$

Jadvaldagi C_{baz} bilan belgilangan ustun x_1, x_2, \dots, x_m bazis o'zgaruvchilarning chiziqli funktsiyadagi koeffitsientlardan tashkil topgan vektor, ya'ni

$$C_{\text{baz}} = (c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (2.22)$$

Jadvalda har bir P_j vektorning ustiga x_j noma'lumning chiziqli funktsiyadagi koeffitsienti c_j yozilgan. $m+1$ - qatorga esa x_1, x_2, \dots, x_m bazis o'zgaruvchilardagi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$Y_0 = \sum_{i=1}^m b_i c_i \quad (2.23)$$

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i - c_j$$

$$(i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad (2.24)$$

yozilgan. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_1, P_2, \dots, P_m vektorlar bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun $\Delta_j = Z_j - s_j = 0$ ($j=1, \dots, m$) bo'ladi. Agar barcha ustunlarda $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, u holda

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

yechim optimal yechim bo'ladi. Bu echimdagi chiziqli funktsiyaning qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

$$\max_{Z_j - c_j > 0} (Z_j - c_j) = Z_k - c_k = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni bazisga kiritib, bazisdan

$$\min_{a_{ik} > 0} (b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk} \quad (2.25)$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektorni chiqarish kerak bo'ladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan l -qatordagi P_l vektor o'rniga u joylashgan ustundagi P_k vektor bazisga kiritiladi. P_l vektorning o'rniga P_k vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

$$\begin{cases} b_i' = b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ b_l' = b_l / a_{lk}, \\ a_{ij}' = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Simpleks jadval almashgandan so'ng yana qaytadan $\Delta_j \leq 0$ baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremlarga asoslanib ish ko'riladi:

1- teorema. Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ bazis reja uchun $\Delta_j = Z_j - s_j \leq 0$ ($j=1, \dots, n$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2- teorema. Agar X_0 bazis rejada tayin bir j uchun $\Delta_j = Z_j - s_j > 0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda X_0 optimal reja bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar tayin bir j uchun $\Delta_j = Z_j - s_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda 2- teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo'ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funktsiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo'lmashlik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun $\Delta_j = Z_j - s_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar $a_{ij} \leq 0$ ($i=1, \dots, m$) bo'lsa, u holda masalaning maqsad funktsiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda optimallik sharti ($\Delta_j \leq 0$, $j=1, \dots, n$) bajarilsin. Bu holda bu echim

$$(X_0 = B^{-1}P_0) \quad (2.26)$$

formula orqali topiladi. Bu erda $B=(P_1, P_2, \dots, P_m)$ matritsa bazis vektorlardan tashkil topgan matritsadir.

(1)-(3) masala uchun V matritsa m o'lchovli O'_m , birlik matritsadir, ya'ni $B=O'_m$.

$BB^{-1}=O'_m$ bo'lganligi sababli B^{-1} matritsa ham birlik matritsadir. Demak

$X_0=P_0=(b'_{10}, b'_{20}, \dots, b'_{m0}, 0, \dots, 0)$ optimal yechim bo'ladi.

1-misol. Masalani simpleks usul bilan yeching

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6) \\ Y = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to'ldiramiz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C' = (0; 1; -3; 0; 2)$$

i	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Simpleks usulning I bosqichida bazisga R_3 vektor kiritilib R_4 vektor chiqarildi, II bosqichida R_2 kiritildi va R_1 chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

$$X = (0; 4; 5; 0; 0; 11) \quad Y_{\min} = -11.$$

4-§. Sun'iy bazis usuli

Agar masalaning shartlarida o'zaro erkli bo'lgan m ta birlik vektorlar (bazis vektorlar) qatnashmasa, ular sun'iy ravishda kiritiladi. Masalan, quyidagi ko'rinishdagi masala berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (2.27)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.28)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \quad (2.29)$$

Bu masalaga $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilsa, quyidagi kengaytirilgan masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (2.30)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (2.31)$$

$$Y = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + 0(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (2.32)$$

U holda $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar bazis vektorlar va $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar «bazis o'zgaruvchilar» deb qabul qilinadi.

Agar berilgan masala quyidagi ko'rinishda bo'lsa,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.33)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.34)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (2.35)$$

Unga sun'iy $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar kiritilib ushbu kengaytirilgan masala hosil qilinadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (2.37)$$

$$Y = + c_1x_1 + c_2x_2 - \dots - c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (2.38)$$

bu erda: M – etarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar «sun'iy bazis vektorlar» deb ataladi.

Berilgan (2.33)-(2.35) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

Teorema. Agar kengaytirilgan (2.36)-(2.38) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$x_{n+i} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 4) \\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Yechish. Masalaga sun'iy $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni normal ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6) \\ Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan echamiz.

i	Bazis vekt.	C _{baz}	P ₀	-5	-3	-4	1	M	M
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₅	M	3	1	3	2	2	1	0
2	P ₆	M	3	2	2	1	1	0	1
Δ _j			6M	3M+5	5M+3	3M+4	3M-1	0	0
1	P ₂	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	P ₆	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
Δ _j			M-3	4/3M+4	0	-1/3M+2	-1/3M-3	-5/3M-1	0
1	P ₂	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	P ₁	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
Δ _j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M
1	P ₃	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	P ₁	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
Δ _j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Shunday qilib simpleks usul bo'yicha 4-ta qadamdan iborat yaqinlashishda optimal yechim topildi. $\Delta_j \leq 0$. Optimal yechim $X=(1;0;1;0;0;0)$ $Y_{\min}=-9$.

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng ($x_5=0, x_6=0$). Shuning uchun (3-teorema asosan) berilgan masalaning optimal yechimi

$$X=(1;0;1;0); \quad Z_{\min}=-9; \quad Z_{\max}=9; \quad \text{bo'ladi.}$$

5- §. Xos chiziqli dasturlash masalasi. Tsikllanish va undan qutilish usuli (ε - usul)

Agar R_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta $x_i=0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_mP_m$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli dasturlash masalasi **xos chiziqli dasturlash masalasi** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja – **xos reja** bo'ladi.

Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli dasturlash masalalarini xosmas deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funktsiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

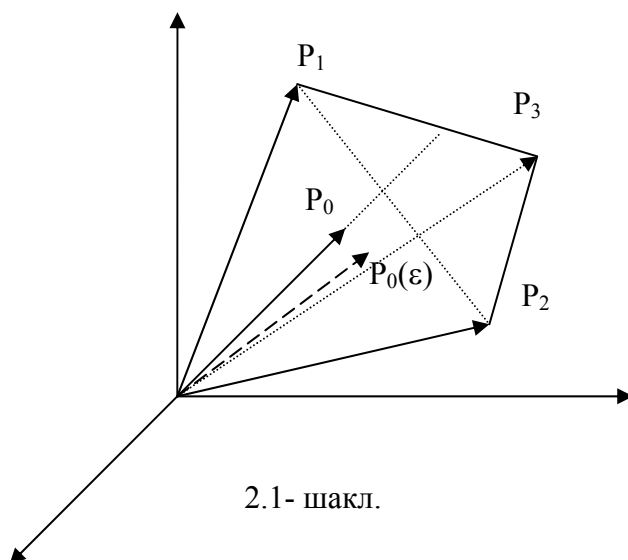
Agar masalaning bazis rejasi xos reja bo'lsa,

$$\theta = \frac{x_k}{x_{lk}} = 0$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funktsiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida

tsikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Tsikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Tsikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i=0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta=0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash tsikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, xos masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Xos chiziqli dasturlash masalasining geometrik tasvirini 2.1 shakldan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffitsienti $x_3=0$ bo'lishi kerak.



2.1- шакл.

Agar P_3 vektorni siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3=P_0(\varepsilon) \quad (2.39)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil togan qavariq konusning ichida yotadi (2.1- shakl). Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m + \dots + x_n P_n = P_0 \quad (2.40)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m + \dots + x_n P_n = \\ P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots + \varepsilon^m P_m + \dots + \varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Faraz qilaylik, P_1, P_2, \dots, P_m bazis vektorlar bo'lib, ular B matritsani tashkil qilsin. U holda

$$\bar{X} = B^{-1} P_0 \geq 0 \quad (2.42)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\bar{X}(\varepsilon) = B^{-1} P_0(\varepsilon) \geq 0 \quad (2.43)$$

o'zgartirilgan (2.41) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo'ladi.

$$\bar{X}_j = B^{-1} P_j \quad (2.44)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (2.43) ni ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\begin{aligned} \bar{X}(\varepsilon) &= B^{-1} P_0 + \varepsilon B^{-1} P_1 + \varepsilon^2 B^{-1} P_2 + \dots + \varepsilon^m B^{-1} P_m + \dots + \varepsilon^n B^{-1} P_n = \\ &= \bar{X} + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots + \varepsilon^m X_m + \dots + \varepsilon^n X_n. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Demak, $\bar{b}_i(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{b}_i(\varepsilon) = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j a_{ij} \quad (2.46)$$

$$\bar{b}_i(\varepsilon) = \bar{b}_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^n \varepsilon^j a_{ij} \quad (2.46)$$

ε ni shunday kichik son deb qabul qilish mumkinki, $\bar{b}_i(\varepsilon) > 0$

tengsizlik barcha $i=1, 2, \dots, m$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^n \varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}} > 0 \quad (2.48)$$

qiymatni barcha $a_{lk} > 0$ lar uchun hisoblaymiz. (2.47) ga asosan $\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$

nisbat $i=l$ da minimumga erishadi, chunki $b_l(\varepsilon)$ ε^l ni o'z ichiga oluvchi birdan-bir o'zgaruvchidir. (2.45) va (2.48) ga asosan θ_0 (2.46) dagi ε^l oldidagi koeffitsientdan foydalanib aniqlanadi.

Simpleks jadval bo'yicha ishlash jarayonini quyidagicha tartiblash mumkin.

Agar

$$\theta_0 = \min_i \frac{\overline{b_i}}{a_{ik}}, \quad (a_{ik} > 0)$$

qiymat, bitta $i=l$ indeks uchun o'rinli bo'lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi. Agar θ minimum qiymatga bir nechta i indekslarda erishsa, u holda hamma i indekslar uchun $j=l$ da a_{ij}/a_{ik} nisbat hisoblanadi. Bu nisbatlarning minimumiga mos keluvchi vektorni bazisdan chiqariladi. Agar θ minimum qiymatga bir nechta i indekslarda erishsa, u holda xuddi shunday nisbatni $j+1$ ustun uchun hisoblanadi va bu nisbatning minimum qiymatiga mos keluvchi vektor bazisdan chiqariladi.

Masalan, agar P_1, P_2, \dots, P_m bazis vektorlar uchun

$$\theta_0 = \frac{b_1}{a_{1k}} = \frac{b_2}{a_{2k}},$$

bo'lsa, u holda $\frac{a_{11}}{a_{1k}}; \frac{a_{21}}{a_{2k}}$ nisbatlar hisoblanib, ular o'zaro solishtiriladi.

Bunda

$$\min_j \left(\frac{a_{j1}}{a_{jk}} \right) = \frac{a_{21}}{a_{2k}}, \quad (i = 1, 2)$$

bo'lsa, P_2 vektor bazisdan chiqariladi. Agar

$$\min_i \left(\frac{a_{i1}}{a_{ik}} \right) = \frac{a_{11}}{a_{1k}}, \quad (i = 1, 2)$$

bo'lsa, bazisdan P_1 vektor chiqariladi. Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{1k}} = \frac{a_{21}}{a_{2k}}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\frac{a_{12}}{a_{1k}}$ va $\frac{a_{22}}{a_{2k}}$ nisbatlar hisoblanib, ular o'zaro solishtiriladi.

Yuqoridagidek nisbatlarni solishtirish tengsizlik hosil bo'lguncha davom ettiriladi. (2.47) ga asosan albatta birorta j uchun tengsizlik hosil qilishi kerak.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so'ng, simpleks jadval ma'lum yo'l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja etarli darajada kichik ε uchun xosmas reja bo'ladi.

Amalda xos chiziqli dasturlash masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala Amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \quad + x_6 = 0, \\ \quad \quad \quad x_3 + \quad \quad \quad + x_7 = 1, \end{cases} \quad (I)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \rightarrow \min.$$

Bu masala xos masala bo'lib, uni yuqorida keltirilgan «to'g'rilash» usulini qo'llamay echganda tsikllanish holati ro'y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so'ng 2- iteratsiyaga qaytish holati ro'y beradi. Agar yuqorida ko'rgan «to'g'rilash» usulini qo'llamasak, bu tsikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak masalaning optimal echimini topish imkoniyati bo'lmaydi.

Endi masalaga «to'g'rilash» usulini qo'llab yechamiz. Eng avval berilgan masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \quad + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ \quad \quad \quad x_3 + \quad \quad \quad + x_7 = 1, \end{cases} \quad (II)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \rightarrow \min.$$

Bu erda ε kichik musbat son bo'lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o'ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo'shish etarli bo'lsin. (II) masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

Baz	C _{baz}	P ₀	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
vek.			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₅	0	0+(1/4)ε-60ε ²	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P ₆	0	0+(1/2)ε-90ε ²	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P ₇	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

II.

P ₁	-3/4	ε-240ε ²	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P ₆	0	30ε ²	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P ₇	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P ₁	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P ₂	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P ₇	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P ₁	-3/4	160ε ² +ε	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P ₃	-1/50	500ε ²	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P ₇	0	1	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1
		0	0	-40	0	2	-1	-7/3	0

V.

P ₁	-3/4	160ε ² +ε+2/125	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P ₂	-1/50	500ε ² +1	0	0	1	0	0	0	1
P ₄	6	1/250	0	-2	0	1	2/15	-1/15	-
									1/250
		-1/125-130ε ² -3/4ε	0	-39	0	0	7/5	-11/5	-
									1/125

VI.

P ₁	-3/4	160ε ² +ε+1/25	1	-180	0	6	0	2	1/25
P ₃	-1/50	500ε ² +1	0	0	1	0	0	0	1
P ₅	0	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	-
									3/100
		-130ε ² -3/4ε-1/20	0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20

Shunday qilib, yuqoridagi «to'g'irlash» usulini qo'llab masalani yechganda 6- bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon) = (160\varepsilon^2 + \varepsilon + 1/25; 500\varepsilon^2 + 1; 0; 3/100)$$

$$Y_{\min}(\varepsilon) = -130\varepsilon^2 - (3/4)\varepsilon - 1/20$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz.

Javob: $X_0=(1/25; 0; 1; 0; 3/100)$, $Y_{\min}(X_0)=-1/20$.

Quyidagi xos masalani to'g'rilash usulini (ε - usulni) qo'llab yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,7}) \end{cases}$$

$$Y = x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max.$$

Tayanch so'z va iboralar.

Ajratilgan o'zgaruvchilar; ajratilmagan o'zgaruvchilar; bazis; bazis o'zgaruvchi; bazis yechim; umumiy yechim; nomanfiy bazis yechim; nazorat tenglama; aniqlovchi koeffitsient; 0-tenglama; X-tenglama; 0-tenglamalar sistemasi; X-tenglamalar sistemasi; simpleks usul; simpleks jadval; optimallik mezoni; optimal yechimning mavjud emaslik mezoni; sun'iy bazis; sun'iy bazis usuli; kengaytirilgan masala; xos chiziqli dasturlash masalasi; xos reja (yechim); tsikllanish; ϵ -usul.

Nazorat savollari:

1. Bazis nima?
2. Bazis vektorlar va bazis o'zgaruvchilar nima?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yoki bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan formasi qanday?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimi deganda qanday yechimni tushunamiz?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimi nima?
6. 0- tenglama va 0- tenglamalar sistemasini ta'riflang.
7. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lmaslik sharti qanday?
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimi qachon mavjud bo'lmaydi?
9. Nazorat tenglama nima?
10. Aniqlovchi koeffitsient nima va u qanday topiladi?
11. Simpleks jadval nima va uning qanday ko'rinishlarini bilasiz?
12. Chiziqli dasturlash masalasining optimal rejasi (yechimi) nima?
13. Optimal yechimning mavjud emaslik sharti qanday?
14. Bazis yechimlar qanday qoida asosida almashtiriladi?
15. Simpleks (Dantsig) usulining g'oyasi qanday?
16. Dantsig usulida optimallik mezoni qanday?
17. Dantsig usulida optimal yechimning mavjud emaslik mezoni qanday?
18. Sun'iy bazis usuli qachon qo'llaniladi?
19. Sun'iy o'zgaruvchi va qo'shimcha o'zgaruvchilar nima va ularning farqi nimadan iborat?
20. Sun'iy bazis usulida optimal yechimning mavjud emaslik sharti qanday?
21. Chiziqli dasturlash masalasining xos masalasi qanday?
22. Tsikllanish nima va u qachon ro'y berishi mumkin?
23. ϵ - usulning g'oyasi qanday?

Masalalar:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 3x_3 - x_4 = 30, \\ x_j \geq 0. \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

2. Chiziqli tengsizliklar simtemasining nomanfiy bazis yechimini toping.

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0. \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0. \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

3. Berilgan sistemaning nomanfiy bazis yechimlari ichida maqsad funktsiyaga ekstremal qiymat beruvchisini toping.

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}) \\ Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 20, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}) \\ Y = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}) \\ Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4. Chiziqli dasturlash masalalarini simpleks usul bilan yeching.

$$a) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

$$Y = 7x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 9 \rightarrow \max.$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

$$Y = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max.$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \max.$$

5. Masalalarning yechimini sun'iy bazis usuli bilan toping.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \max.$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

$$Y = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max.$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max.$$

6. Xos chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini toping.

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 & - 2x_5 = 0, \\ x_2 & + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 & + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, & (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max.$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 + 11x_5 + 2x_6 - x_7 - x_8 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 15x_4 + 12x_5 - x_6 - x_7 + 3x_8 = 2, \\ x_j \geq 0, & (j = \overline{1,8}) \end{cases}$$

$$Y = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + x_7 + 7x_8 \rightarrow \max.$$

$$e) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_j \geq 0, & (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

$$Y = 2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \max.$$

III - BOB. CHIZIQLI DASTURLASHDA IKKILANISH NAZARIYASI

1-§. Ikkilanish nazariyasining asosiy tushunchalari. Qo'shma masalalar va ularning iqtisodiy talqini. Simmetrik va simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar.

Har bir chiziqli dasturlash masalasiga unga nisbatan ikkilangan masala deb ataluvchi boshqa masalani mos qo'yish mumkin. Berilgan masaladagi maqsad funktsiya va noma'lumlarga qo'yilgan chegaraviy shartlar orqali ikkilangan masalaning maqsad funktsiyasini va chegaraviy shartlarini to'la aniqlash mumkin.

Berilgan masala va unga ikkilangan masalalar birgalikda o'zaro ikkilangan (qo'shma) masalalar deb ataladi. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masalalardan birortasi yechimga ega bo'lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'ladi.

O'zaro qo'shma masalalarni ko'z oldiga keltirish va ularning iqtisodiy ma'nolarini tahlil qilish uchun quyida ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0, \quad (3.2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (3.3)$$

Masalaning (3.1) sharti mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan m xil xom ashyoning har biri chegaralangan ekanligini va ularni me'yorida sarf qilish kerakligini ko'rsatadi. Bu erda: x_j ($j=1, \dots, n$) ishlab chiqariladigan j -mahsulot miqdori, b_i ($i=1, \dots, m$) i -xom ashyoning zahirasi, a_{ij} koeffitsientlar j -mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan i -xom ashyo miqdori (normasi) ni ko'rsatadi. Y -maqsad funktsiya bo'lib u ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati maksimum bo'lishi kerakligini ko'rsatadi, bu erda C_j - j -mahsulot birligining bahosidir. Masalani vektor formada quyidagicha yozish mumkin:

$$AX \leq B, \quad (3.4)$$

$$X \geq 0, \quad (3.5)$$

$$Y = CX \rightarrow \max \quad (3.6)$$

Faraz qilaylik, korxona ma'lum bir sabablarga ko'ra mahsulot ishlab chiqarishni to'xtatgan bo'lsin. Shu sababli korxona xom ashyo va boshqa ishlab chiqarish vositalarini sotmoqchi bo'ladi. Korxona bu xom ashyolarni sotishdan olgan tushumining mahsulot ishlab chiqarib uni sotishdan olgan tushumidan kam bo'lmasligiga harakat qiladi. Ikkinchi tomondan xom ashyo sotib oluvchi korxona esa

Matematik nuqtai nazardan ikkilangan masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$F = b_1 W_1 + b_2 W_2 + \dots + b_m W_m \longrightarrow \min \quad (3.9)$$

Ikkilangan masala matritsa formada quyidagicha yoziladi:

$$F=WB \longrightarrow min \quad (3.12)$$

Berilgan masala

$$Y=CX \longrightarrow \max(\min) \quad (3.15)$$

Ikkilangan masala

$$F=WB \longrightarrow \min(\max) \quad (3.17)$$

67

ko'rinishda bo'lsa, ikkilangan masalada u $F \rightarrow \min$ bo'ladi va aksincha, agar berilgan masalada maqsad funktsiya $Y \rightarrow \min$ ko'rinishda bo'lsa, u xolda ikkilangan masalada $F \rightarrow \max$ ko'rinishda bo'ladi.

Yukoridagilardan xulosa qilib, o'zaro ikkilangan (qo'shma) masalalarning matematik modellarini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin.

Simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar:

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | Berilgan masala
$AX=B,$
$X \geq 0,$
$Y=CX \rightarrow \min$ | Ikkilangan masala
$WA \leq S,$
$F=WB \rightarrow \max$ |
| 2. | Berilgan masala
$AX=B,$
$X \geq 0,$
$Y=CX \rightarrow \max$ | Ikkilangan masala
$WA \geq S,$
$F=WB \rightarrow \min$ |

Simmetrik qo'shma masalalar:

- | | | |
|----|---|---|
| 3. | Berilgan masala
$AX \geq B,$
$X \geq 0,$
$Y=CX \rightarrow \min$ | Ikkilangan masala
$WA \leq S,$
$W \geq 0,$
$F=WB \rightarrow \max$ |
| 4. | Berilgan masala
$AX \leq B,$
$X \geq 0,$
$Y=CX \rightarrow \max$ | Ikkilangan masala
$WA \geq S,$
$W \geq 0,$
$F=WB \rightarrow \min$ |

Qo'shma masalalar orasida yana quyidagi bog'lanishlar mavjud.

1. Berilgan masaladagi texnologik koeffitsientlardan tashkil topgan matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, ikkilangan masaladagi matritsa

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda, ya'ni A matritsaga transponirlangan matritsa bo'ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma'lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalarning soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni berilgan masaladagi noma'lumlar soniga teng bo'ladi.

3. Ikkilangan masala maqsad funktsiyasidagi koeffitsientlar berilgan masaladagi ozod hadlardan iborat bo'ladi. Ikkilangan masaladagi ozod xadlar esa berilgan masala maqsad funktsiyasi koeffitsientlaridan iborat bo'ladi.

4. Agar berilgan masaladagi x_j noma'lum musbat bo'lsa ($x_j \geq 0$) u holda ikkilangan masaladagi j -cheklama " \geq " ko'rinishdagi tengsizlikdan iborat bo'ladi. Agar x_j noma'lum musbat ham, manfiy ham qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi j -cheklama tenglamadan iborat bo'ladi.

5. Agar berilgan masaladagi i -cheklama tengsizlikdan iborat bo'lsa, ikkilangan masaladagi W_i noma'lum musbat bo'ladi, ya'ni $W_i > 0$.

Agar (1)-(3) masaladagi i -cheklama tenglamadan iborat bo'lsa, W_i musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin.

1-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ Y = 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\longrightarrow \max. \end{aligned}$$

Yechish. Masaladagi barcha cheklamalar " \leq " ko'rinishdagi tengsizliklardan iborat, demak, berilgan masalaga simmetrik qo'shma masalalarni xosil qilamiz:

<p>Berilgan masala</p> $\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ Y = 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\longrightarrow \max. \end{aligned}$	<p>Ikkilangan masala</p> $\begin{aligned} -W_1 + 2W_2 + 3W_3 &\geq 2, \\ 3W_1 - W_2 + W_3 &\geq 1, \\ -5W_1 + 4W_2 + W_3 &\geq 3, \\ W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, W_3 \geq 0, \\ F = 12W_1 + 24W_2 + 18W_3 &\longrightarrow \min. \end{aligned}$
---	---

2-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 &\leq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ Y = 4x_1 + x_2 + 4x_3 &\longrightarrow \max \end{aligned}$$

Yechish. Berilgan masaladagi ikkinchi shart tenglamadan, 1-shart hamda 3-shart tengsizliklardan iborat. Shuning uchun, ikkilangan masalani tuzishda yuqoridagi 5-punktida keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalalarga ega bo'lamiz:

Berilgan masala

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 12, \\x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 13, \\x_1 + 5x_2 - 6x_3 &\leq 11, \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\Y = 4x_1 + x_2 + 4x_3 &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Ikkilangan masala

$$\begin{aligned}W_1 + W_2 + W_3 &\geq 4, \\-W_1 + 3W_2 + 5W_3 &\geq 1, \\4W_1 - 2W_2 - 6W_3 &\geq 4, \\W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, W_3 \geq 0, \\F = 12W_1 + 13W_2 + 11W_3 &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

2-§. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremlari va ularning iqtisodiy talqini

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy W joiz rejasi uchun

$$Y(X) \leq F(W) \quad (3.18)$$

tengsizlik, ya'ni

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i W_i$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining **asosiy tengsizligi** deb ataladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy mumkin bo'lgan ishlab chiqarish rejasi hamda xom ashyolarning ixtiyoriy mumkin bo'lgan baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi sarf qilingan xom ashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

1-teorema. Agar qo'shma masalalardan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u xolda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funktsiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$Y_{\min} = F_{\max} \quad (3.19)$$

Agar bu masalalardan birining chiziqli funktsiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchi masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teoremani simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar uchun isbotlaymiz. Berilgan masala optimal yechimga ega va uni simpleks usul bilan topish mumkin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmasdan optimal yechimdagi bazis vektorlar birinchi m ta P_1, P_2, \dots, P_m vektorlardan iborat deb qabul qilamiz. Shu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan matritsani B bilan belgilaymiz. Oxirgi simpleks jadval dastlabki simpleks jadvaldagi $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$ vektorlarning bazis vektorlar buyicha yoyilmasini o'z ichiga oladi, ya'ni dastlabki simpleks jadvaldagi har bir vektor P_j uchun oxirgi simpleks jadvalda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi X_j vektor mos keladi:

$$P_j = BX_j \text{ yoki } B^{-1}P_j = X_j \quad (3.20)$$

$\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n)$ bilan oxirgi simpleks jadvalning elementlaridan tashkil topgan matritsani belgilaymiz. Simpleks jadvalning dastlabki m ta vektori bazis vektorlardan iborat bo'lganligi sababli \bar{X} matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & x_{1m+1} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & x_{2m+1} & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x_{mm+1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Optimal echim $X^0 = B^{-1}b$ vektordan iborat bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$A = B\bar{X}, \quad B^{-1}A = \bar{X}, \quad (3.21)$$

$$b = BX^0, \quad B^{-1}b = X^0, \quad (3.22)$$

$$y_{\min} = C^0 X^0, \quad (3.23)$$

$$\Delta = C^0 \bar{X} - C \leq 0, \quad (3.24)$$

bu erda $C^0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ - optimal echimga mos keluvchi C - vektorning koordinatalaridan tuzilgan vektor - qator. Endi

$$W^0 = C^0 B^{-1} \quad (3.25)$$

formula orqali aniqlanuvchi W^0 ni ikkilangan masalaning rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (3.16), (3.21), (3.24), (3.25) munosabatlarga asosan

$$W^0 A - C = C^0 B^{-1} A - C = C^0 \bar{X} - C \leq 0.$$

Demak,

$$W^0 A - C \leq 0,$$

yoki

$$W^0 A \leq S,$$

Shunday qilib (3.25) shartni kanoatlantiruvchi W^0 vektorni ikkilangan masalaning rejasi bo'ladi. Bu rejadagi ikkilangan masala chiziqli funktsiyasining qiymati $Z(W^0) = W^0 b$ ga teng.

(3.25) va (3.22) ga asosan

$$Z(W^0) = W^0 b = C^0 B^{-1} b = C^0 X^0 = Y(X^0) = Y_{\min} \quad (3.26)$$

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala chiziqli funktsiyasining W^0 rejadagi qiymati berilgan masalaning chiziqli funktsiyasining optimal qiymatiga teng ekan.

Endi W^0 reja ikkilangan masalaning optimal rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (3.13) va (3.14) shartlarni kanoatlantiruvchi ixtiyoriy n o'lchovli W vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$WAX=Wb=Z(W) \quad (3.27)$$

$$WAX \leq CX=Y(X) \quad (3.28)$$

(3.27) va (3.28) dan

$$Z(W) \leq Y(X) \quad (3.29)$$

tengsizliklar xosil bo'ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy W va X lar uchun bajariladi. Demak, (3.16) va (3.17) chiziqli funktsiyalarning optimal qiymatlari uchun ham

$$\max F(W) \leq \min Y(X) \quad (3.30)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan W^0 reja uchun (3.26) tenglik o'rinlidir. Demak, W^0 da ikkilangan masalaning chiziqli funktsiyasi uzining maksimal qiymatiga erishadi.

Xuddi shunday yo'l bilan, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, burilgan masala ham optimal echimga ega bo'lishini va qo'shma masalalarning optimal echimlari uchun

$$\max F(W) = \min Y(X)$$

tenglik o'rinli bo'lishini isbot qilish mumkin.

Teoremani ikkinchi kismini isbotlash uchun berilgan masalaning chiziqli funktsiyasi quyidan chegaralanmagan deb faraz qilamiz. U xolda (3.29) ga asosan

$$F(W) \leq -\infty$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu ifoda ma'noga ega bo'lmaganligi sababli ikkilangan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Xuddi shuningdek ikkilangan masalaning chiziqli funktsiyasi yukoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak, (3.29) ga asosan

$$Y(X) \geq +\infty$$

tengsizlikni xosil qilamiz. Bu tengsizlik ham ma'noga ega bo'lmagani sababli, berilgan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot qilingan teorema simmetrik qo'shma masalalar uchun ham o'rinli bo'lib, unga asosan o'zaro qo'shma masalalardan ixtiyoriy birining yechimini topib, u orqali ikkinchisining yechimini aniqlash mumkin.

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtai nazardan shunday talqin qilinadi:

Agar tashkaridan belgilangan C_j bahoda sotilgan mahsulotning pul miqdori W_i ichki baho asosida o'lchangan xarajatlar (xom ashyolar) miqdoriga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{j=1}^n C_j X_j = \sum_{i=1}^m b_i W_i$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u xolda mahsulotning mumkin bo'lgan ishlab chiqarish rejasi hamda xom ashyolarning mumkin bo'lgan baholari optimal bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkilangan baholar sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdorini o'zaro teng bo'lishini ta'minlovchi vosita bo'lib xizmat qiladi.

Xulosa. Agar berilgan masala yechimga ega bo'lsa, u xolda ikkilangan masalaning yechimi $W^0 = B^{-1} C^0$ formula orqali topiladi. Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u xolda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0 = b^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Misol. Berilgan va unga ikkilangan masalani yeching.

Berilgan masala

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7,$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12,$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10,$$

$$x_j \geq 0, j=1, 6,$$

$$Y = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \longrightarrow \min$$

Yechish. Masalada quyidagi belgilashlar kiritamiz va ikkilangan masalani tuzamiz.

$$C = (0, 1, -3, 0, 2, 0),$$

$$b = (7, 12, 10)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bu erda, A^T - A matritsaga nisbatan transponirlangan matritsa.

Ikkilangan masala:

$$W_1 \leq 0,$$

$$3W_1 - 2W_2 - 4W_3 \leq 1,$$

$$-W_1 + 4W_2 + 3W_3 \leq -3,$$

$$W_2 \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
&2W_1+8W_3\leq 2, \\
&W_3\leq 0, \\
&F=7W_1+12W_2+10W_3\rightarrow \max
\end{aligned}$$

Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

I.

B.v.	C	P ₀	0	1	-3	0	2	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
P ₁	0	7	1	3	-1	0	2	0
P ₄	0	12	0	-2	4	1	0	0
P ₆	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ _j		0	0	-1	3	0	-2	0

II.

B.v.	C	P ₀	0	1	-3	0	2	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
P ₁	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P ₃	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P ₆	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ _j		-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0

III.

B.v.	C	P ₀	0	1	-3	0	2	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
P ₁	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P ₄	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P ₆	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ _j		-11	-1/5	0	0	-8/10	-12/5	0

III iteratsiyadan sung berilgan masalaning optimal echimi

$$X = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$$

topiladi. Bu echimdagi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$Y_{min} = -11$$

Oxirgi simpleks jadvaldan:

$C^0 = (1, -3, 0)$ - vektor kator va teskari B^{-1} matritsani aniqlaymiz.

$$B^{-1} = (P_1, P_4, P_6) = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

va (3.17) formula yordamida ikkilangan masalaning yechimini topamiz:

$$W^0 = (W_1, W_2, W_3) = (1, -3, 0) \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-1/5, -4/5, 0).$$

Shunday qilib, ikkilangan masalaning optimal yechimi:

$$W^0 = (-1/5, -4/5, 0),$$

bo'lib, unga mos keluvchi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$F_{max} = -11$$

bo'ladi. Oxirgi simpleks jadvaldan ko'rinadiki ikkilangan masala yechimini hisoblab o'tirmaslik ham mumkin. Bu jadvalda B^{-1} matritsani tashkil qiluvchi P_1, P_4, P_6 vektorlarga mos keluvchi $m+1$ - katorning ($\Delta_1, \Delta_4, \Delta_6$) elementlari W^0 vektorning (ikkilangan masala yechimining) elementlarini beradi. $m+1$ - katorning P_0 vektorga mos kelgan elementi esa optimal yechimga mos keluvchi Y_{min} va F_{max} funktsiyalarning qiymatini beradi.

Shunday qilib, ko'rish mumkinki, optimal yechimda qo'shma masalalar maqsad funktsiyalarning qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$Y_{min} = Y(X^0) = F(W^0) = F_{max} = -11.$$

2-teorema. Berilgan masalaning bazis yechimi X^0 va ikkilangan masalaning bazis yechimi W^0 optimal yechimi bo'lishi uchun quyidagi tengliklarning bajarilishi zarur va etarlidir.

$$x_j^0 \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i^0 - C_j \right) = 0, j = \overline{1, n} \quad (3.31)$$

$$W_i^0 \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0, i = \overline{1, m} \quad (3.32)$$

Isboti. Teoremani (3.1)-(3.3) va (3.7)-(3.9) ko'rinishdagi berilgan qo'shma masalalar uchun isbotlaymiz. X^0 va W^0 vektorlar mos ravishda berilgan va unga ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin deb faraz qilamiz. U xolda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \leq b_i, i = \overline{1, m} \quad (3.33)$$

$$x_j^0 \geq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 \geq C_j, j = \overline{1, n} \quad (3.35)$$

$$W_i^0 \geq 0, (i = \overline{1, m}) \quad (3.36)$$

(3.33) tengsizlikning ikki tomonini W_i^0 ga ko'paytiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$W_i^0 \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^0 \leq W_i^0 b_i, (i = \overline{1, m}) \quad (3.37)$$

Bu tengsizlikning ikki tomonini i indeks bo'yicha summalaymiz:

$$\sum_{i=1}^m W_i^0 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \leq \sum_{i=1}^m W_i^0 b_i$$

yoki

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 W_i^0 \leq \sum_{i=1}^m W_i^0 b_i \quad (3.38)$$

Xuddi shuningdek (3.35) tengsizlikning ikki tomonini $x_j^0 \geq 0$ ga ko'paytirib j indeks bo'yicha summalaymiz va quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz.

$$\sum_{j=1}^n x_j^0 \sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j^0$$

yoki

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j^0 W_i^0 \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j^0. \quad (3.39)$$

Yuqoridagi 1-teorema asosan qo'shma masalalarning optimal yechimlari uchun

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^m b_i W_i^0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak (3.38) va (3.39) dan quyidagi munosabatlardan xosil qilish mumkin.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j^0 W_i^0,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 x_j^0 = \sum_{i=1}^m W_i^0 b_i.$$

Bu tengliklarni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\sum_{i=1}^m W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0) = 0, \quad (3.40)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^0 (\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 - C_j) = 0. \quad (3.41)$$

Bu munosabatlardan (3.33), (3.34), (3.35) va (3.36) shartlarni inobatga olib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0) = 0,$$

$$x_j^0 (\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 - C_j) = 0.$$

Shu bilan, teorema shartlarining zarurligi isbotlandi. Ularning etarlicligini isbotlash uchun qo'shma masalalarning ixtiyoriy X^l va W^l bazis yechimlarini ko'ramiz va ular ustida yuqoridagidek almashtirishlar bajarib

$$\sum_{i=1}^m W_i^1 b_i = \sum_{j=1}^n C_j x_j^1$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, 1-teoremaga asosan X^l va W^l rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'ladi. Shu bilan teorema isbot qilindi. Ushbu teoremdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1. Agar

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 < b_i$$

tengsizlik ixtiyoriy $i = \overline{1, m}$ uchun bajarilsa, u holda $W_i^0 = 0$ bo'ladi.

2. Agar

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i$$

tenglik ixtiyoriy $i = \overline{1, m}$ uchun bajarilsa, u holda $W_i^0 > 0$ bo'ladi.

3. Agar

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 > C_j, j = \overline{1, n}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $x_j^0 = 0$ bo'ladi.

4. Agar

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i^0 = C_j, i = \overline{1, n}$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_j^0 > 0$ bo'ladi.

Bu xulosalardan ko'rinadiki, ikkilangan baholarga xom ashyolarning kamyob (defitsit) ekanligini baholovchi o'lchov (kattalik) deb qarash mumkin.

Ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom ashyo **kamyob xom ashyo** deb ataladi. Bunday xom ashyolarning ikkilamchi bahosi musbat ishorali bo'ladi. Kamyob xom ashyolarning ishlab chiqarishga sarf qilingan hajmini bir birlikka oshirish natijasida korxona daromadini oshirish mumkin.

Ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom ashyolar **kamyob bo'lmagan (ortiqcha) xom ashyo** deb ataladi. Bunday xom ashyolarning ikkilamchi bahosi 0 ga teng bo'ladi.

Mahsulot ishlab chiqarishda kamyob bo'lmagan xom ashyolarni oshirib sarf qilish natijasida korxona daromadini oshirib bo'lmaydi.

Deylik, xom ashyolarning b_i zahirasi o'zgaruvchan bo'lsin. X^0 optimal rejani o'zgartirmagan holda xom ashyolar sarfini qanchalik o'zgartirish mumkin, hamda b_i ning o'zgarishi maqsad funktsiyaning ekstremal qiymatiga qanday ta'sir etadi? - degan savol tug'ilishi mumkin. Bu savolga ikkilanish nazariyasining 3-teoremasi javob beradi.

3-teorema. Optimal baho W_i^0 ning qiymati i - xom ashyoning b_i zahirasi bir birlikka o'zgarganda maqsad funktsiya Y_{max} ning o'zgargan miqdorini ko'rsatadi, ya'ni

$$W_i^0 = \frac{\partial Y_{max}}{\partial b_i}$$

Agar ∂b_i ni Δb_i ga, ∂Y_{max} ni ΔY_{max} ga almashtirsak, u holda

$$W_i^0 = \frac{\Delta Y_{\max}}{\Delta b_i}$$

yoki

$$\Delta Y_{\max} = W_i^0 \Delta b_i$$

Bundan, agar $\Delta b_i = 1$ bo'lsa, u holda $\Delta Y_{\max} = W_i^0$ bo'ladi, ya'ni ikkilangan masalaning optimal yechimi kamyob xom ashyolar miqdorini bir birlikka oshirib sarf qilinganda maqsad funktsiyaning qancha miqdorga o'zgarishini ko'rsatadi.

Misol. quyida keltirilgan masalaning va unga ikkilangan masalaning yechimini toping hamda ikkilanish nazariyasining asosiy teoremlarining o'rinli ekanini tekshiring.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 16, \\ x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_2 + x_3 &\leq 6, \\ x_j &\geq 0, (j=1, 2, 3) \\ Y = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\longrightarrow \max \end{aligned}$$

Echish. Masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{aligned} W_1 + 2W_2 + W_3 &\geq 3, \\ 2W_1 + W_2 + W_3 + W_4 &\geq 4, \\ W_1 + W_2 + W_4 &\geq 2, \\ W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, W_3 \geq 0, W_4 \geq 0, \\ F = 18W_1 + 16W_2 + 8W_3 + 6W_4 &\longrightarrow \min \end{aligned}$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz va simpleks usul bilan yechamiz.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 16, \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 8, \\ x_2 + x_3 + x_7 &= 6, \\ x_j &\geq 0, (j=1, 2, \dots, 7) \\ Y = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\longrightarrow \max \end{aligned}$$

I.

B.v.	C	P ₀	3	4	2	0	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	0	18	1	2	1	1	0	0	0
P ₅	0	16	2	1	1	0	1	0	0
P ₆	0	8	1	1	0	0	0	1	0
P ₇	0	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ _i	0	-3	-4	-2	0	0	0	0

II.

B.v.	C	P ₀	3	4	2	0	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2
P ₅	0	10	2	0	0	0	1	0	-1
P ₆	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P ₂	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ _i	24	-3	0	2	0	0	0	4

III.

B.v.	C	P ₀	3	4	2	0	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P ₅	0	6	0	0	2	0	1	-2	1
P ₁	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P ₂	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ _i	30	0	0	-1	0	0	3	4

IV.

B.v.	C	P ₀	3	4	2	0	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P ₃	2	3	0	0	1	0	1/2	-1	1/2
P ₁	3	5	1	0	0	0	1/2	0	-1/2
P ₂	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2
	Δ _i	33	0	0	0	0	1/2	2	3/2

Simpleks usulning 4-bosqichida masalaning optimal yechimi topildi

$$X^0 = (5; 3; 3; 4)$$

$$Y(X^0) = 33.$$

Ikkilangan masalani yechimi

$$W^0 = (0; 1/2; 2; 3/2)$$

$$F(W^0) = 33.$$

Demak, optimal yechim uchun 1-teorema o'rinli bo'lyapti:

$$Y_{max} = Y(X^0) = F(W^0) = F_{min} = 33.$$

Berilgan masalaning yechimini uning shartlariga qo'yganda 1-shart qat'iy tengsizlikka aylanadi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi shartlar esa tenglamaga aylanadi:

$$5 + 2 \cdot 3 + 3 = 14 < 18$$

$$2 \cdot 5 + 3 + 3 = 16 = 16$$

$$5 + 3 = 8 = 8$$

$$3 + 3 = 6 = 6$$

Shuning uchun ikkilangan masalada $W_1^0 = 0$ hamda $W_2^0 \neq 0, W_3^0 \neq 0, W_4^0 \neq 0$

Endi ikkilangan masalaning

$$W^0 = (0; 1/2; 2; 3/2)$$

optimal yechimini uning shartlariga qo'ysak, undagi barcha shartlar ayniyatga aylanadi:

$$0+2 \cdot 1/2+2=3=3$$

$$2 \cdot 0+1/2+2+3/2=4=4$$

$$0+1/2+3/2=2=2$$

Shuning uchun berilgan masalaning optimal yechimidagi barcha x_j^0 kordinatalar musbat. Bu yukoridagi 2-teoremaning o'rinli ekanini ko'rsatadi.

Oxirgi simpleks jadvaldan ko'rish mumkinki,

$$\Delta_4 = W_1^0 = 0, \Delta_5 = W_2^0 = 1/2, \Delta_6 = W_3^0 = 2, \Delta_7 = W_4^0 = 3/2.$$

Demak, 3-teoremaga asosan masalaning I-shartidagi ozod hadning o'zgarishi maqsad funktsiyaga ta'sir etmaydi. Agar II-shartdagi ozod hadni bir birlikka oshirsak, maqsad funktsiya

$$W_2^0 = 1/2 \text{ mikkorga oshadi.}$$

Xuddi shuningdek, berilgan masalaning II va IV-shartlaridagi ozod hadlarni bir birlikka oshirsak, maqsad funktsiya mos ravishda 2 va 3/2 birlikka oshadi.

3-§. Iqtisodiy masalalar yechimlarining tahlili

Ma'lumki, chiziqli dasturlash usullari va jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi.

Lekin buning o'zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so'ng iqtisodiy ob'ektlar (zavod, fabrika, firma) boshliqlari oldida quyidagiga o'xshash muammolarni yechishga to'g'ri keladi:

- xom ashyolarning ba'zilarini oshirib, ba'zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o'zgaradi?
- optimal yechimni o'zgartirmasdan xom ashyolar sarfini qanday darajaga o'zgartirish (kamaytirish) mumkin?

Mahsulotga bo'lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o'zgaradi?

Shunga o'xshash muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasidan foydalaniladi. Bunga ikkilanish nazariyasining yuqoridagi teoremlariga asoslaniladi.

Iqtisodiy masalaning optimal yechimini tahlil qilish jaraenini quyidagi misolda ko'rsatamiz.

1-masala. Faraz qilaylik, korxonada bir xil mahsulot 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiya bo'uyicha bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan resurslarning miqdori, ularning zahirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	Texnologiyalar			Resurslar zahirasi
	T1	T2	T3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xom ashyo	2	3	2.5	150
Elektroenergiya (kvt/s)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni qayta ishlatish rejalari (vaqti)	X_1	X_2	X_3	

Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori maksimal bo'lishi uchun qaysi texnologiyadan qancha vaqt foydalanish kerak?

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz:

$$\begin{aligned}
 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 &\leq 1200 \\
 2x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 &\leq 150 \\
 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 &\leq 3000 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
 Y = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 &\longrightarrow \max
 \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{aligned}
 15W_1 + 2W_2 + 35W_3 &\geq 300, \\
 20W_1 + 3W_2 + 60W_3 &\geq 250, \\
 25W_1 + 2.5W_2 + 60W_3 &\geq 450, \\
 W_1 \geq 0, \quad W_2 \geq 0, \quad W_3 \geq 0, \\
 F = 1200W_1 + 150W_2 + 3000W_3 &\longrightarrow \min
 \end{aligned}$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}
 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + x_4 &= 1200 \\
 2x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + x_5 &= 150 \\
 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 + x_6 &= 3000 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \\
 Y = -300x_1 - 250x_2 - 450x_3 &\longrightarrow \min
 \end{aligned}$$

Bu masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

B. o'zg	C_{baz}	B_0	-300	-250	-450	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0
X_5	0	150	2	3	2.5	0	1	0
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1
Δ_j		0	300	250	450	0	0	0
X_3	-450	48	0.6	0.8	1	0.04	0	0
X_5	0	30	0.5	1	0	-0.1	1	0
X_6	0	120	-1	12	0	-2.4	0	1
Δ_j		-21600	30	-110	0	-18	0	0
X_3	-450	12	0	-0.4	1	0.16	-1.2	0
X_1	-300	60	1	2	0	-0.2	2	0
X_6	0	180	0	14	0	-2.6	2	1
Δ_j		-23400	0	-170	0	-12	-60	0

Simpleks usulning III-bosqichida berilgan masalaning optimal yechimi topildi

$$X^*=(60; 0; 12; 0; 0; 180),$$

$$Y_{\min}=-23400, Y_{\max}=23400$$

Jadvaldan ko'rinadiki, T-1 texnologiyani 60 soat, T-3 ni 12 soat qo'llash kerak. T-2 texnologiyani esa, umuman qo'llamaslik kerak.

Ikkilangan masalaning yechimi:

$$W^0=(12; 60; 0), F_{\max}=23400.$$

Demak, birinchi va ikkinchi resurslar (ish kuchi va birlamchi xom ashyo)ning ikkilangan baholari uchun

$$W_1^0 = 12 > 0, W_2^0 = 60 > 0$$

munosabatlar o'rinli. Bundan ish kuchi va birlamchi xom ashyo ishlab chiqarishda to'la ishlatilganligi ko'rinadi. Demak, bu resurslar kamyob resurslardir.

Uchinchi resurs (elektroenergiya)ning ikkilamchi bahosi $W_3^0 = 0$ bo'lgani uchun bu resurs kamyob emas, ya'ni ortiqcha.

Bu aytilganlarni tekshirish uchun berilgan masalaning yechimini uning shartlariga qo'yamiz.

$$15 \cdot 60 + 2 \cdot 0 + 25 \cdot 12 = 1200$$

$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 0 + 2.5 \cdot 12 = 150$$

$$35 \cdot 60 + 60 \cdot 0 + 60 \cdot 12 = 2820 < 3000$$

hamda undagi birinchi va ikkinchi shartlarning ayniyatga, uchinchi shart esa qat'iy tengsizlikka aylanganini ko'ramiz.

Demak, xaqiqatdan ham, ish kuchi va birlamchi xom ashyo kamyob, elektroenergiya esa ortiqcha ekan.

Elektroenergiyani ikkilamchi bahosi $W_3^0 = 0$ bo'lgani uchun uni ishlab chiqarishga oshirib sarf qilish, korxonada mahsulot ishlab chiqarish hajmini o'zgarishiga ta'sir qilmaydi.

Ish kuchining ikkilamchi bahosi $W_1^0 = 12 > 0$ bo'lgani uchun uni bir birlikka oshirib sarf qilinsa, korxonadagi ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu rejani qanday o'zgarishini aniqlash uchun oxirgi simpleks jadvaldagi X_4 ustuniga qaraymiz va xulosa qilamiz. Yangi rejaga asosan T-1 texnologiya 0.2 soat kamroq, T-3 texnologiya esa 0.16 soat ko'proq ishlatiladi. Natijada korxona 12 birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqaradi. Bu holda korxonaning ishlab chiqargan mahsulotining hajmi

$$23400 + 12 = 23412$$

birlik bo'ladi.

Birlamchi xom ashyoning ikkilamchi bahosi $W_2^0 = 60 > 0$. Demak, bu xom ashyoni bir birlikka oshirib sarf qilish oqibatida korxonada ishlab chiqariladigan mahsulotlar hajmi 60 birlikka oshadi, ya'ni

$$23400 + 60 = 23460$$

birlik bo'ladi. Oxirgi simpleks jadvalning X_5 ustuniga qaraymiz va aniqlaymiz. Birlamchi xom ashyoni bir birlikka oshirib sarf qilinsa, korxonaning ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu rejaga asosan T-1 texnologiya 2 soat ko'proq va T-3 texnologiya 1.2 soat kamroq ishlatiladi va natijada ishlab chiqariladigan umumiy mahsulot miqdori 60 birlikka oshadi:

$$(60+2) \cdot 300 + (12-1.2) \cdot 450 = 23460$$

Endi ikkilangan masala yechimini uning shartlariga qo'yib topamiz:

$$5 \cdot 12 + 5 \cdot 60 + 35 \cdot 0 = 300$$

$$20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420 > 250$$

$$25 \cdot 12 + 2.5 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 450$$

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala yechimida 1 va 3-shartlar ayniyatga aylanib, 2-shart qat'iy tengsizlikka aylanadi.

Demak, T-1 va T-3 texnologiyalar yordamida bir birlik vakt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi bilan unga sarf qilingan resurslarning ikkilamchi baholari o'zaro teng. Shuning uchun T-1 va T-3 texnologiyalarni ishlab chiqarishda qo'llash kerak.

T-2 texnologiya bilan bir birlik vakt ichida sarf qilingan resurslarning ikkilamchi bahosi ishlab chiqariladigan mahsulotlar bahosidan ko'p bo'layapti. Demak, T-2 texnologiya samarasiz. Shuning uchun uni ishlab chiqarishda qo'llash kerak emas.

Endi quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz:

2-misol. 3 ta A,B,C mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xom ashyolar (resurslar) ishlatilsin. I tur xom ashyoning zahirasi 180 kg. II tur xom ashyoning zahirasi 210 kg va III tur xom ashyoning zaxirasi 244 kg bo'lsin. Har bir mahsulotning 1 birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xil xom ashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalda joylashtirilgan.

ashyo mahsulotlar \ xom	I	II	III	Mahsulot birligining bahosi
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
xom ashyo zahirasi	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo'lib, uning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 180, \\
3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 210, \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 244, \\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
Y = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 &\longrightarrow \max.
\end{aligned}$$

Bu erda $X=(x_1, x_2, x_3)$ ishlab chiqarish rejasini ko'rsatadi. Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{aligned}
4W_1 + 3W_2 + W_3 &\geq 10, \\
2W_1 + W_2 + 2W_3 &\geq 14, \\
W_1 + 3W_2 + 5W_3 &\geq 12, \\
W_1 \geq 0, \quad W_2 \geq 0, \quad W_3 \geq 0, \\
F = 180W_1 + 210W_2 + 244W_3 &\longrightarrow \min
\end{aligned}$$

Bu erda $W=(w_1, w_2, w_3)$ - xom ashyolarning ikkilamchi bahosidan iborat vektor-qator. Ikkilangan masalaning iqtisodiy ma'nosi: xom ashyolar bahosini shunday tanlash kerakki, natijada 1 birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyoning umumiy bahosi mahsulot bahosidan kam bo'lmasin, hamda sarf qilingan barcha xom ashyolarning umumiy bahosi minimal bo'lsin.

Ma'lumki, agar berilgan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkilangan masala ham yechimga ega bo'ladi va bu yechim

$$W^* = C^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi. Bu erda C^0 oxirgi simpleks jadval optimal yechimga mos keluvchi maqsad funktsiya koeffitsientlaridan tashkil topgan vektor-qator. B - dastlabki simpleks jadvaldagi bazis vektorlardan tashkil topgan matritsa. B^{-1} - oxirgi simpleks jadvalda B matritsa o'rnida hosil bo'lgan matritsa (teskari matritsa).

Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

	B. o'zg	C _{baz}	10	14	12	0	0	0	X ₀
			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	
I.	X ₄	0	4	2	1	1	0	0	180
	X ₅	0	3	1	3	0	1	0	210
	X ₆	0	1	2	5	0	0	1	244
	Δ _j		-10	-14	-12	0	0	0	
II.	X ₂	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
	X ₅	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
	X ₆	0	-3	0	4	-1	0	1	64
	Δ _j		18	0	-5	7	0	0	1260
III.	X ₂	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
	X ₅	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
	X ₃	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
	Δ _j		57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Natijada ikkala masala uchun optimal yechimini topamiz.

Optimal yechim: berilgan masala uchun

$$X^*=(0; 82; 16), \quad Y_{max}=1340$$

ikkilangan masala uchun

$$W^*=(23/4; 0; 5/4), \quad F_{min}=1340$$

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun ikkilangan masala yechimini ko'ramiz. Unda $W_1=23/4$ va $W_3=5/4$ bo'lib, ular nolga teng emas. Bu hol I va II tur xom ashyolarning to'la ishlatilganligini, ya'ni ularning kamyob ekanligini ko'rsatadi. Bu yechimda $W_0=0$, bu hol II tur xom ashyo to'la ishlatilmaganligini, demak, uning ortiqcha ekanligini (kamyob emasligini) ko'rsatadi.

Ikkilangan masalaning yechimi "**shartli ikkilangan baho**" deyiladi. Ular xom ashyolar miqdorini bir birlikka ortiqcha sarf qilinganda maqsad funktsiyaning qiymati, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulotning pul miqdori qanchaga o'zgarishini ko'rsatadi. Masalan, 1-tur xom ashyoni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati $23/4=5.75$ birlikka oshadi. Agar 1 tur xom ashyodan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, korxonaning ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu yangi rejaga muvofik ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 birlikka ko'proq bo'ladi. Jadvaldagi X_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish $5/8$ birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish $1/4$ birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xom ashyo sarfi $1/8$ birlikka kamayadi.

$$(5/8 \cdot 1 - 3 \cdot 1/4 = 5/8 - 6/8 = -1/8).$$

Xuddi shuningdek X_6 ustunga qaraymiz. 3 tur xom ashyo xarajatini 1 kg ga oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko'ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati $5/4=1.25$ so'mga oshadi va $1340+1.25=1341.25$ so'mni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni $1/8$ birlikka kamaytirish, C mahsulot ishlab chiqarishni $1/4$ birlikka oshirish xisobiga bo'ladi. Bu holda 2-tur xom ashyo $5/8$ kg ko'proq sarf qilinadi.

Ikkilamchi optimal baholarni ikkilangan masala shartlariga qo'yib quyidagilarni aniqlaymiz:

$$23+5/4>10$$

$$23/2+5/2=14$$

$$23/4+25/4=12$$

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masalaning birinchi sharti qat'iy tengsizlikdan iborat bo'lyapti. Bu hol A mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyolarning bahosi bu mahsulot bahosidan ko'p bo'layapti. Shuning uchun A mahsulotni ishlab chiqarish korxona uchun foydali emas. Ikkilangan masaladagi 2 va 3-shartlar optimal yechimda tenglikka aylanadi. Bu hol B va C mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyolarning bahosi mahsulot bahosiga teng ekanligini ko'rsatadi. Demak, B va C mahsulotlarni ishlab chiqarish korxona uchun foydali bo'ladi.

Shunday qilib, shartli optimal baholar berilgan masalaning optimal rejasi bilan chambarchas bog'langan. Berilgan masaladagi parametrlarning har qanday o'zgarishi uning optimal yechimiga ta'sir qiladi, demak ular shartli optimal baholarning o'zgarishiga ham sabab bo'ladi.

4-§. Ikkilangan simpleks usul

Bu paragrafda biz chiziqli dasturlash masalasining **ikkilanish nazariyasiga asoslangan va ikkilangan simpleks usul** deb ataluvchi usul bilan tanishamiz.

Ikkilangan simpleks usul oddiy simpleks usulga nisbatan ba'zi qulayliklarga ega:

1) ikkilangan simpleks usul bo'yicha yechilayotgan masala shartlaridagi b_i ozod hadlar musbat bo'lmasligi ham mumkin;

2) ikkilangan simpleks usul bilan bir vaqtning o'zida ham berilgan masalaning hamda unga ikkilangan masalaning yechimi topiladi yoki ikkala masalaning echimi mavjud emasligi aniqlanadi;

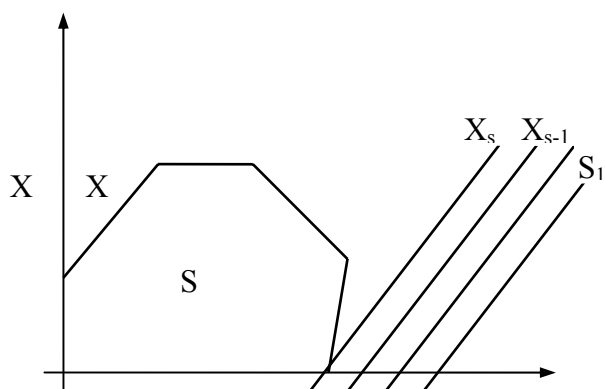
3) berilgan masalaning cheklamalari « \geq » belgi bilan bog'langan yoki uning ba'zi ozod hadlari manfiy bo'lgan hollarda, ikkilangan simpleks usulni qo'llash bajariladigan hisoblash ishlari sonini kamaytiradi;

4) ikkilangan simpleks usul bilan ishlab chiqarishning ba'zi zarur tavsiflarini aniqlash mumkin. Masalan, bir vaqtning o'zida ham ishlab chiqarish rejasini, ham ishlab chiqarishga sarf qilinadigan hamma vositalar bahosini hisoblash mumkin.

Oddiy simpleks usul singari ikkilangan simpleks usulining har bir iteratsiyasida n o'lchovli X vektor almashib boradi. Faqat, shunga e'tibor berish kerakki, simpleks usuldan farqli ravishda, ikkilangan simpleks usul bilan topilgan n -o'lchovli X vektor tayanch reja bo'lmasligi mumkin, chunki u musbatlik shartini qanoatlantirmasligi mumkin.

Bunday rejani **chala joiz reja** deb ataymiz.

Ikkilangan simpleks usul bo'yicha chala joiz rejalarni almashtirish jarayoni bazis reja topilguncha tarorlanadi. Topilgan bazis reja esa masalaning optimal echimi bo'ladi.



Geometrik nuqtai nazardan $X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s$ chala joiz rejalar ketma ketligi berilgan chiziqli dasturlash masalasi joiz rejalaridan tashkil topgan S qavariq sohaning tashqarisida yotuvchi chiziqlardan iborat bo'ladi va har bir X_i, X_{i-1} ga nisbatan S to'plamga yaqinroq joylashgan bo'ladi. (3.1-shakl)

3.1-shakl

Chala joiz rejalarini almashtirish jarayoni natijasida S to'plamning bo'sh to'plam ekanligi aniqlanadi yoki chekli sondagi iteratsiyadan so'ng, shunday $X_s \in S$ nuqta topiladiki, u berilgan masalaning bazis rejasi va demak, optimal yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, kanonik formadagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo'lsin.

$$AX=b, \quad (3.42)$$

$$X \geq 0, \quad (3.43)$$

$$Y=CX \rightarrow \min. \quad (3.44)$$

Bu masalaga ikkilangan masala quyidagicha bo'ladi:

$$WA \leq C, \quad (3.45)$$

$$F=Wb \rightarrow \max. \quad (3.46)$$

Berilgan masalaning (3.42) shartini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ chala joiz reja berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. X vektorning noldan farqli bo'lgan elementlariga mos keluvchi P_j vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'ladi. O'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasini berilgan chala joiz rejadagi bazis deb ataymiz.

Chala joiz reja \tilde{X} uchun

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (3.47)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$W^0 = C^0 B^{-1}$$

vektor ikkilangan masalaning joiz rejasi bo'ladi. Bu rejadagi (3.46) chiziqli funktsiyaning qiymati

$$F^0 = C^0 B^{-1} b$$

formula orqali aniqlanadi. (3.47) shartni qanoatlantiruvchi chala joiz reja uchun quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema. Agar chala joiz reja (3.42) - (3.44) masalaning bazis rejasi bo'lsa, u optimal reja ham bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra barcha $\Delta_j \leq 0$ hamda \tilde{X} - bazis reja. Demak, uning barcha elementlari musbat ($x_j > 0$). II bob, 3-§ da ko'rsatilgan 2-teoremaga asosan \tilde{X} reja optimal reja bo'ladi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Endi chala joiz reja \tilde{X} ni yangi chala joiz reja \tilde{X} ga almashtirish jarayoni bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, \tilde{X} vektorga mos keluvchi bazis matritsa

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_l, \dots, P_m)$$

bulsin. Bu matritsaga teskari bo'lgan V^l matritsaning katorlarini B_i bilan belgilaymiz. U holda \tilde{X} vektorning elementlari

$$\tilde{x}_i = B_i b$$

formula orqali aniqlanadi. Agar barcha i lar uchun $x_i \geq 0$ bo'lsa, \tilde{X} - bazis reja bo'ladi. Faraz qilaylik $x_l = B_l b = \min B_i b < 0$ bo'lsin. U holda P_l vektorni bazisdan chiqarish kerak. Bazisga kirmagan P_j vektorlar uchun $x_{lj} = B_l P_j$ o'rinli bo'ladi. Endi kamida bitta $x_{lj} < 0$ lar uchun $(y_j - c_j)/x_{lj}$ ni hisoblaymiz.

Agar

$$\theta = \min_{x_{lj} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{y_j - c_j}{x_{lj}} > 0$$

bo'lsa, P_k vektor bazisga kiritiladi. Natijada yangi

$$\bar{B} = (P_1, P_2, \dots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \dots, P_m)$$

bazis matritsa kelib chiqadi.

Bu bazisga mos keluvchi yangi

$$\tilde{X}^1 = (\tilde{x}_1^1, \tilde{x}_2^1, \dots, \tilde{x}_{l-1}^1, \tilde{x}_k^1, \tilde{x}_{l+1}^1, \dots, \tilde{x}_m^1)$$

chala joiz rejaning komponentlari

$$\tilde{X}^1 = \bar{B}^{-1} b$$

formula orqali topiladi. Yangi bazisga mos keluvchi ikkilangan masalaning yechimi

$$W^l = W^0 - \theta V_l$$

formula orqali topiladi. W^l rejaga mos keluvchi Z chiziqli funktsiyaning qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$W^l b = W^0 b - \theta x_l$$

Agar \tilde{X}^1 rejaning barcha elementlari musbat bo'lsa, u optimal reja bo'ladi. Aks holda, yana bazisdan chiqariladigan P_m vektor aniqlanadi. Agar barcha $x_{mj}^1 \geq 0$ bo'lsa, berilgan masala va unga ikkilangan masala yechimga ega bo'lmaydi. Agar ba'zi j larda $x_{mj}^1 \leq 0$ bo'lsa, u holda

$$\theta = \min_{x_{mj} < 0} \frac{y'_j - c_j}{x_{mj}} = \frac{y'_t - c_t}{x_{mt}}$$

shartini qanoatlantiruvchi P_i vektor bazisga kiritiladi. Simpleks jadval oddiy simpleks usulidagidek almashtiriladi. Shunday qilib, chala joiz rejalarni almashtirish jaryoni berilgan va ikkilangan masalaning optimal yechimi topilguncha takrorlanadi.

Ikkilangan simpleks usulga doir bo'lgan quyidagi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar (3.42) - (3.44) masalaning chala joiz rejasining komponentlaridan kamida bittasi, masalan $x_k < 0$ bo'lib, barcha j lar uchun $x_{kj} \geq 0$ bo'lsa, berilgan masala tayanch rejaga ega bo'lmaydi.

3-teorema. Agar topilgan chala joiz reja \tilde{X} uchun $\Delta_j = y_j - c_j \leq 0$, bo'lganda, $x_k < 0$ bo'lib, kamida bitta $x_{kj} < 0$ bo'lsa, u holda X ni yangi chala reja X' ga almashtirish natijasida chiziqli funktsiyaning qiymati kamayadi. X vektorni X' ga almashtirish uchun bazisdan P_k vektor chiqarilib, bazisga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi P_s vektor kiritiladi:

$$x_k < 0, x_{ks} < 0$$

va

$$\left| \begin{array}{c} \Delta_s \\ \hline x_{ks} \end{array} \right| < \left| \begin{array}{c} \Delta_j \\ \hline x_{kj} \end{array} \right| \quad (j \neq s; x_{kj} < 0).$$

Misol. Quyidagi masala va unga ikkilangan masalaning yechimini ikkilangan simpleks usul yordami bilan toping.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \min.$$

Echish. Berilgan masalani kanonik formaga keltiramiz.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_7 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases} \quad (I)$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \min.$$

Bu masaladagi x_5, x_6, x_7 qo'shimcha o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlarga aylantirish uchun (I) masaladagi tenglamalarning har birini (-1) ga ko'paytiramiz. Natijada quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -8, \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 + x_6 = -4, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_7 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases} \quad (II)$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

Bu masalaga ikkilangan masala ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} -3w_1 - 2w_3 \leq 4, \\ -2w_1 + w_2 \leq 3, \\ w_1 + 3w_2 - w_3 \leq 10, \\ -5w_1 - 6w_2 + w_3 \leq 5, \\ w_1 \leq 0, \\ w_2 \leq 0, \\ w_3 \leq 0, \end{cases} \quad (III)$$

$$Z = -8w_1 - 4w_2 \rightarrow \max$$

(II) masalada P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, simpleks jadvalni to'ldiramiz.

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ uchun}$$

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0,$$

bo'ladi. Demak,

$$X^0 = B^{-1}b = (-8, -4, 0)$$

vektor (II) masalaning chala joiz yechimi bo'ladi. Bu erda $B = (P_5, P_6, P_7)$ - bazis matritsa. Ikkilangan masalaning bu bazisdagi echimi

$$W^0 = C^0 B^{-1} = (0, 0, 0)$$

Chala joiz reja X ning eng kichik manfiy elementiga mos keluvchi P_5 vektorni bazisdan chiqaramiz va

$$\theta = \min_{x_{1j} < 0} \frac{\Delta_j}{x_{1j}} = \min_{x_{1j} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{1j}} = \frac{\Delta_4}{x_{14}} = 1 > 0$$

shartni qanoatlantiruvchi P_4 vektorni bazisga kiritamiz. x_{14} - xal qiluvchi element bo'ladi. Simpleks jadvalni oddiy simpleks usuldagidek almashtiramiz. Yangi simpleks jadvalda barcha j lar uchun

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0.$$

Berilgan masalaning yangi chala joiz rejasi $X^1 = (8/5, 28/5, -8/5)$ bo'ladi. Bu joiz rejaga mos keluvchi ikkilangan masala (III) ning joiz rejasi

$$W = (-1, 0, 0)$$

vektordan iborat va chiziqli funktsiyaning unga mos keluvchi qiymati

$$Y' = Y(X') = F' = F(W) = 8 \text{ bo'ladi.}$$

Chala joiz X' ning manfiy elementiga mos keluvchi P_7 vektorni bazisdan chiqarib,

$$\theta = \min_{x_{3j} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{3j}} = \min_{x_{3j} < 0} \left(\frac{-1}{-\frac{13}{5}}, \frac{-1}{-\frac{2}{5}}, \frac{-11}{-\frac{4}{5}} \right) = \frac{5}{13} = \frac{\Delta_1}{x_{31}}$$

shartni qanoatlantiruvchi P^1 vektorni bazisga kiritamiz va simpleks jadvalni almashtiramiz. Yangi simpleks jadvalda barcha j lar uchun

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0.$$

Yangi bazisga mos keluvchi chala joiz reja

$$X'' = \left(\frac{16}{13}, \frac{44}{13}, \frac{8}{13} \right)$$

bo'ladi. Bu rejadagi hamma elementlar musbat bo'lgani uchun bu berilgan masalaning joiz rejasi va demak (1- teorema asosan) uning optimal rejasi bo'ladi.

Yangi bazisdagi ikkilangan masalaning yechimi

$$W'' = \left(-\frac{14}{13}; 0; -\frac{5}{13} \right)$$

vektordan iborat va

$$Y_{min} = Y(X'') = F_{max} = F(W'') = 112/13$$

I.

Bazis vekt.	C _{baz}	P ₀	4	3	10	5	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₅	0	-8	-3	-2	1	-5	1	0	0
P ₆	0	-4	0	1	3	-6	0	1	0
P ₇	0	0	-2	0	-1	1	0	0	1
Δ _j		0	-4	-3	-10	-5	0	0	0

II.

Bazis vekt.	C _{baz}	P ₀	4	3	10	5	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	5	8/5	3/5	2/5	-1/5	1	-1/5	0	0
P ₆	0	28/5	18/5	17/5	9/5	0	-6/5	1	0
P ₇	0	-8/5	-13/5	-2/5	-4/5	0	1/5	0	1
Δ _j		0	-1	-1	-11	0	-1	0	0

III.

Bazis vekt.	C _{baz}	P ₀	4	3	10	5	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
P ₄	5	16/13	0	4/13	-5/13	1	-2/13	0	3/13
P ₆	0	44/13	0	37/13	9/13	0	-12/13	1	18/13
P ₁	4	8/13	1	2/13	4/13	0	-1/13	0	-5/13
Δ _j		112/13	0	-11/13	-139/13	0	-14/13	0	-5/13

Tayanch so'z va iboralar

Ikkilangan masala; simmetrik qo'shma masalalar; simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar; ikkilamchi baholar; optimal yechim bahosi; tanqis (kamyoib) xom ashyo; notanqis xom ashyo; shartli optimal yechim; ikkilangan simpleks usul; chala joiz yechim; chala bazis yechim.

Nazorat savollari

1. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning umumiy qo'yilishi va turli shaklda yozilishini ko'rsating.
2. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning iqtisodiy ma'nosini izohlang.
3. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning maqsad funktsiyalari orasidagi bog'lanish qanday?
4. Berilgan va unga ikkilangan masalalardagi chegaralovchi shartlar orasida qanday bog'lanish bor?
5. Simmetrik va nosimmetrik qo'shma masalalar orasidagi farq qanday?
6. Ikkilanish nazariyasining 1-asosiy teoremasi qanday?
7. Ikkilanish nazariyasining 2-asosiy teoremasini ta'riflang va uning ma'nosini izohlang.
8. Ikkilanish nazariyasining 3-asosiy teoremasi ta'riflang va uning ma'nosini izohlang.
9. Ikkilangan simpleks usul bilan qanday masalalarni yechish mumkin?
10. Ikkilangan simpleks usulning oddiy simpleks usuldan farqi qanday?
11. Ikkilangan simpleks usulda masala yechimining mavjud emaslik shartini ta'riflang.
12. Ikkilangan simpleks usulda yechimning optimallik sharti nimadan iborat?

Masalalar

Berilgan masalalarga ikkilangan masalani tuzing.

- 1) $2x_1 - 3x_2 \leq 9,$
 $-2x_1 + 5x_2 \leq 25,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$
 $Y = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$
- 2) $2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 9,$
 $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 4,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 \rightarrow \min$
- 3) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6,$
 $2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 9,$
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$
 $Y = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$
- 4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
 $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 13,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$
- 5) $2x_1 + x_2 + x_3 = 10,$
 $-x_1 + 4x_2 + x_4 = 8,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$
- 6) $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2,$
 $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 3,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$

Berilgan masalalarga ikkilangan masalalarni tuzing va ularning ikkalasining ham yechimini toping:

- 1) $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 6,$
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned}
2) \quad & x_1 + 3x_2 \leq 4, \\
& x_1 + 2x_3 \leq 3, \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\
& Y = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\
& Y = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\
& 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\
& Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\
& x_1 - x_3 \leq 4, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\
& Y = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzib uni yeching, hamda yechimni tahlil qiling.

1)

Mahsulotlar Xom ashyolar zahirasi	Mahsulot birligining ishlab chiqarish uchun xom ashyo sarfi		
	A	B	V
48	2	4	3
60	4	2	3
Daromad	6	4	3

2)

Mahsulotlar Ishlab chiqarish resurslari zahirasi	I	II	III	IV
48	2	4	1	5
16	4	1	4	1
22	2	3	1	2
Ishlab chiqariladigan mahsulot bahosi	7	3	4	2

Berilgan masala va unga ikkilangan masalalar yechimini ikkilangan simpleks usul bilan toping.

-
- 1) $x_1 + 2x_3 = 4,$
 $x_1 - x_2 = 3,$
 $x_1 + 6x_2 - x_3 = 3,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$
 $Y = 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$
 - 2) $2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 18,$
 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -8,$
 $x_1 - x_3 \leq 4,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$
 - 3) $3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 8,$
 $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 6,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$
 - 4) $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$
 $2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10,$
 $4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$
 $Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

IV - BOB. PARAMETRLI CHIZIQLI DASTURLASH

1-§. Parametrli chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi va turlari. Parametrli dasturlash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Optimallashtirish masalalarini chiziqli dasturlash usullari bilan yechish uchun bu masalalardagi parametrlar (A matritsa, b va c vektorlarini elementlari) aniq o'zgarmas son qiymatlarini qabul qiladi deb faraz qilinadi. Lekin amaldagi ko'p masalalarda bu parametrning taqribiy qiymatlari yoki ularning o'zgarish sohasi ma'lum bo'ladi. Shuning uchun chiziqli dasturlash masalasi optimal yechimining har bir parametrning o'zgarishiga bog'liqlik darajasini, ya'ni masaladagi parametrlarning o'zgarishi uning yechimiga qanday ta'sir qilishini aniqlash masalasi qo'yiladi. Ana shunday masalalarni xal qilish parametrli chiziqli dasturlashning predmetini tashkil qiladi.

Kanonik formadagi chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz

$$\begin{aligned}AX &= b, \\ X &\geq 0, \\ Y &= C'X \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Bu masalada A matritsaning elementlari, b va C vektorlarning komponentlari qandaydir parametr ta'siri ostida o'zgarishi mumkin.

Agar faqat C vektorning komponentlari λ parametrga bog'liq, ya'ni

$$C = C' + \lambda C'', \quad (\delta \leq \lambda \leq \varphi)$$

bo'lsa, berilgan masala funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala deyiladi. Bunday masalalarda λ parametrning $[\delta, \varphi]$ oraliqdagi har bir qiymati uchun

$$Y = \sum_{j=1}^n (C'_j + C''_j \lambda) x_j, \quad (4.1)$$

fuktsiyaning

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.3)$$

shartlardagi minimum qiymatini topish talab qilinadi.

Bu erda C'_j, C''_j, a_{ij}, b_i - aniq sonlar.

Agar b vektorning komponentlari t parametrga ($\alpha \leq t \leq \beta$) bog'liq, ya'ni

$$b = b' + tb'' \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

bo'lsa, u xolda berilgan masala ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala deb ataladi.

Bunday masalalarda $[\alpha, \beta]$ oraliqdagi har bir t uchun

$$Y = \sum_{j=1}^n C_j x_j, \quad (4.4)$$

fuktsiyaning

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i + b''_i t, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.5)$$

$$x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.6)$$

shartlardagi minimal qiymatini topish talab qilinadi.

Agar chiziqli dasturlash masalasidagi maqsad funktsiya koeffitsientlari hamda ozod xadlar t parametrغا bog'liq bo'lsa, uni quyidagi umumlashgan parametrli dasturlash masalasi ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i + b''_i t, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.7)$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4.8)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (C'_j + C''_j t) x_j \rightarrow \min, \quad (4.9)$$

$$t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.10)$$

Umumiy holda, masaladagi hamma koeffitsientlar parametrغا bog'liq bo'lishi, ya'ni quyidagi masala o'rinli bo'lishi mumkin

$$\sum_{j=1}^n (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_j = b'_i + b''_i t, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.11)$$

$$x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.12)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (C'_j + C''_j t) x_j \rightarrow \min, \quad (4.13)$$

$$t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.14)$$

Qo'yilgan masala chiziqli dasturlash usullari yordamida yechiladi.

Parametrli dasturlash masalalarining geometrik talqini bilan tanishamiz. Buning uchun (4.1) - (4.3) ko'rinishidagi masalaga murojaat qilamiz. Eng avval (4.2) va (4.3) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami (qavariq ko'pburchak) bo'sh emas va bittadan ko'p nuqtani o'z ichiga oladi deb faraz qilamiz. U holda (4.1) - (4.3) masala λ parametrning $\lambda \in [\delta, \varphi]$ oraliqdagi har bir qiymati uchun qavariq ko'pburchakning (4.1) funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtasini topishdan iborat bo'ladi. Bunday nuqtani topish uchun $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 - ixtiyoriy son) deb qabul qilamiz va parametrning bu qiymatida (4.1) - (4.3) masalaning optimal yechimini topamiz. Demak, bu masalaning tayanch rejalaridan tashkil topgan qavariq ko'pburchakning burchak nuqtalari ichida (4.1) funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani topamiz yoki $\lambda = \lambda_0$ da berilgan masalaning yechimi mavjud emasligini aniqlaymiz. Agar $\lambda = \lambda_0$ da (4.1) - (4.3) masalaning optimal yechimi topilgan bo'lsa, bu yechim λ ning yana qanday qiymatlari uchun optimal yechim bo'lishini aniqlaymiz. So'ngra λ ning $[\delta, \varphi]$ oraliqqa tegishli bo'lgan boshqa λ_1

qiymati olinadi va bu qiymatdagi (4.1) - (4.3) masalaning optimal yechimi topiladi. Topilgan yechim λ parametrning $[\delta, \varphi]$ oraliqdagi yana qanday qiymatlari uchun optimal yechim bo'lishi belgilanadi. Chekli sondagi bunday ishlardan so'ng λ ning $[\delta, \varphi]$ oraliqdagi xar bir qiymati uchun berilgan masalaning optimal yechimi topiladi yoki masalaning yechimi mavjud emasligi aniqlanadi.

Quyidagi iqtisodiy masalani matematik modelini tuzing va uni yuqoridagi geometrik talqindan foydalanib yeching.

Masala. Korxona ikki A va V turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xom ashyolar ishlatiladi.

Har bir mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xom ashyolar miqdori (normasi) hamda korxonadagi mavjud xom ashyolar zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom ashyolar normasi		Xom ashyo zahirasi
	A	V	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

A mahsulotning bahosi 2 p.b.dan 12 p.b. oralig'ida, B mahsulotning bahosi esa 13 p.b.dan 3 p.b. oralig'ida o'zgarishi mumkinligini aniqlangan.

Demak, A mahsulotning bahosini

$$C_1 = 2 + t, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

B mahsulot bahosini esa

$$C_2 = 13 - t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

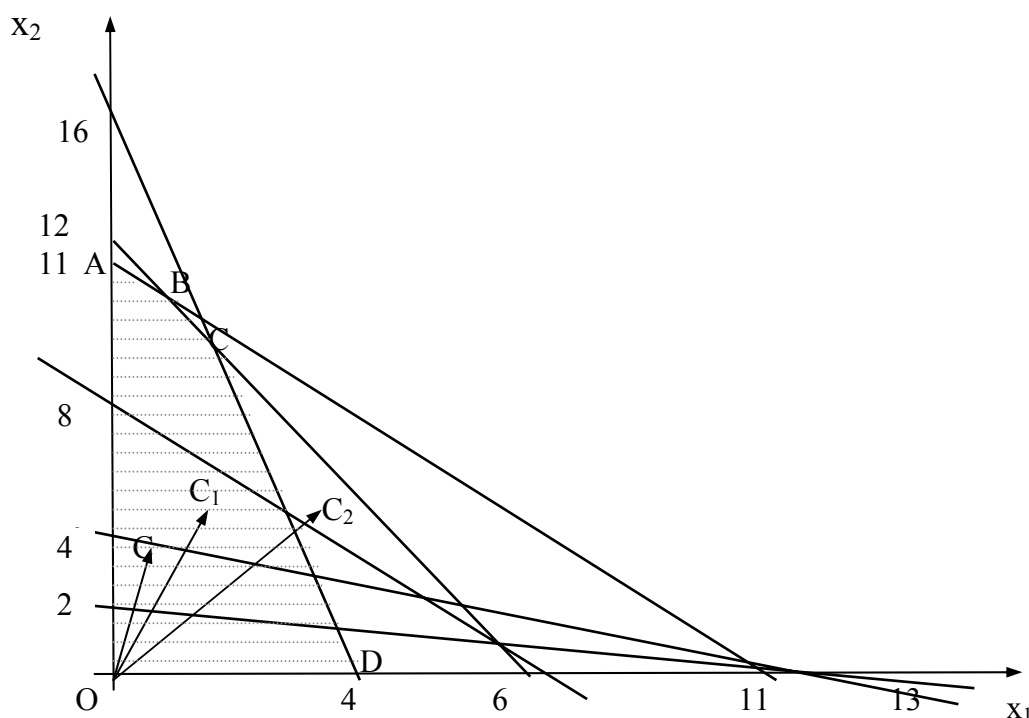
Har bir mumkin bo'lgan baholar uchun ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy bahosini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasi topilsin.

Yechish. Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 22 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} (4.15) \\ (4.16) \end{aligned}$$

$$Y = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \rightarrow \max. \quad (4.17)$$

Hosil bo'lgan masalani yechish uchun (4.15), (4.16) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lgan qavariq ko'pburchakni yasaymiz. Bu OABCD besh burchakdan iborat bo'ladi. (4.1 - shakl).



4.1 – shakl.

Endi $t=0$ da

$$Y=2x_1+13x_2 \rightarrow \max$$

chiziqli funktsiyani hosil qilamiz, hamda Y ga ixtiyoriy (masalan, $Y_1=26$) qiymat berib

$$2x_1+13x_2=26$$

to'g'ri chiziqni yasaymiz. Hosil bo'lgan to'g'ri chiziqni $C(2;13)$ vektor yo'nalishida sura borib, uni $OABCD$ qavariq beshburchakning $A(0;11)$ burchak nuqtasidan o'tishini aniqlaymiz. Bu nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning $t=0$ dagi optimal yechimini beradi

$$X_0^* = (0;11)$$

$$Y_{\max}=143.$$

Bu yechim quyidagicha talqin qilinadi:

Agar A mahsulotning baxosi $C_1=2+0=2$ p.b. va B mahsulotning bahosi $C_2=13-0=13$ p.b. bo'lsa, u holda korxona A mahsulot ishlab chiqarmaydi va B mahsulotdan 11 birlik ishlab chiqaradi. Bu rejaga asosan korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy bahosi 143 p.b. bo'ladi.

Endi $t=2$ deb qabul qilamiz va

$$Y=4x_1+11x_2 \rightarrow \max$$

funktsiyani hosil qilamiz. Y ga ixtiyoriy (masalan $Y_2=44$) qiymat beramiz va

$$4x_1+11x_2=44$$

to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu to'g'ri chiziqni $C_1(4;11)$ vektor yo'nalishida surib borib, uning OAVSD beshburchakning $A(0;11)$ burchak nuqtasidan o'tishini

aniqlaymiz. Bu nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning $t=2$ dagi optimal yechimini beradi:

$$X_1 = (0; 11)$$

$$Y_{max} = 121.$$

Demak, agar A mahsulotning bahosi

$$C_1 = 2 + 2 = 4 \text{ p.b.}$$

bo'lib, B mahsulot bahosi

$$C_2 = 13 - 2 = 11 \text{ p.b.}$$

bo'lsa, u holda korxonaning A mahsulotni ishlab chiqarmasligi va B mahsulotdan 11 birlik ishlab chiqarishini kafolatlaydigan rejasi optimal reja bo'ladi. Bu rejaga asosan korxona jami 121 p.b.ga teng mahsulot ishlab chiqaradi.

4.1- shakldan ko'rinadiki, topilgan reja $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ to'Yori chiziq bilan $2x_1 + 2x_2 = 22$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lmasligini ta'minlovchi barcha t lar uchun optimal reja bo'ladi. Agar bu chiziqlar prallel bo'lsa, u holda

$$\frac{2+t}{2} = \frac{13-t}{2} \Rightarrow t = 5,5 \text{ bo'ladi.}$$

t ning bu qiymatida AB kesmaning ixtiyoriy nuqtasi berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, $0 \leq t \leq 5,5$ oraliqdagi ixtiyoriy t uchun $(4,15)-(4,17)$ masalaning optimal yechimi

$$X_0 = (0; 11).$$

$Y = (2+t) 0 + (13-t) 11 = 143 - 11t$ bo'ladi. Endi t ning bu qiymatida

$$Y = 8x_1 + 7x_2$$

fukntsiyani xosil qilamiz. Y ga $Y_3 = 56$ qiymat beramiz va $8x_1 + 7x_2 = 56$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni $C_2 (8;7)$ vektor yo'nalishida surib borib u bilan OABCD beshburchakning kesishgan burchak nuqtasi $B(1;10)$ ni topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning $t=6$ dagi optimal yechimini beradi.

$$X_1 = (1; 10)$$

$$Y(X_1) = 78.$$

Demak, agar A mahsulot bahosi $C_1 = 2 + 6 = 8$ p.b. bo'lib, B mahsulot bahosi $C_2 = 13 - 6 = 7$ p.b. bo'lsa, korxonaning optimal rejasiga asosan A mahsulotdan 1 ta, B mahsulotdan 10 ta va jami 78 p.b.ga teng mahsulot ishlab chiqariladi.

4.1 - shakldan ko'rinadiki, korxonaning ushbu rejasi $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ va $6x_1 + 3x_2 = 36$ to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lmasligini ta'minlovchi parametrlarning barcha $t > 5,5$ qiymatlari uchun optimal reja bo'ladi. Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa

$$\frac{2+7}{6} = \frac{13-t}{3}$$

tenglik bajariladi. Bundan $t=8$ ekanini aniqlash mumkin. Parametrlarning $t=8$ qiymatida BC kesmaning ixtiyoriy nuqtasi $(4,15)-(4,17)$ masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, t parametrlarning $5,5 \leq t \leq 8$ oraliqdagi ixtiyoriy qiymati uchun berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X_1 = (1; 10)$$

$$Y(X_1) = (2+t) 1 + (13-t) 10 = 13-9t$$

bo'ladi.

Xuddi shuningdek mulohaza yuritib t ning $8 \leq t \leq 10$ oraliqdagi ixtiyoriy qiymatida (4.15)-(4.17) masalaning optimal yechimi

$$X_2 = (1; 10)$$

$$Y(X_2) = 108-6t$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu yechimni quyidagicha talqin qilish mumkin. Agar A mahsulot bahosi 10 va 12 p.b. oralig'ida B mahsulot bahosi 3 va 5 p.b. oralig'ida bo'lsa, u holda korxonaning optimal rejasiga asosan A mahsulotdan 2 ta, B mahsulotdan 8 ta va jami

$$Y(X_2) = 108-6t \quad (8 \leq t \leq 10)$$

p.b.ga teng mahsulotni ishlab chiqarish kerak.

Berilgan (4.15)-(4.17) masalaning optimal yechimini quyidagicha yozish mumkin: t ning $0 \leq t \leq 5,5$ oraliqdagi qiymatlari uchun optimal yechim

$$X_0 = (0; 11), \quad Y(X_0) = 143 - 11t$$

t ning $5,5 \leq t \leq 8$ oraliqdagi qiymatlari uchun optimal yechim

$$X_1 = (1; 10), \quad Y(X_1) = 132 - 9t$$

t ning $8 \leq t \leq 10$ oraliqdagi qiymatlari uchun optimal yechim

$$X_2 = (2; 8), \quad Y(X_2) = 108 - 6t$$

bo'ladi.

2-§. Funktsiyasi parametrغا bog'liq bo'lgan masala

Matematik modeli funktsiyasi parametrغا bog'liq bo'lgan masalaga misol bo'la oladigan mahsulotni ishlab chiqarish va saqlashni optimallashtirish masalasi bilan tanishamiz.

Masala. Faraz qilaylik, korxonada mavsumiy mahsulot ishlab chiqarilsin. Bu mahsulotga bo'lgan talab yilning turli oylarida turlicha bo'lsin. Agar korxona har oyda talabga muvofiq ravishda mahsulot ishlab chiqarsa, u ikki tomonlama zarar ko'rish mumkin:

1) mahsulotga bo'lgan talab maksimal bo'lgan oylarda korxona o'z imkoniyatidan ortiqcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qo'shimcha xarajatlar sarf qiladi;

2) mahsulotga talab kamaygan oylarda esa texnika va ish kuchining bir qismi bekor qolgani sababli korxona yana qo'shimcha zarar ko'radi.

Korxona yilning hamma oylarida bir tekis mahsulot ishlab chiqarib, mahsulotga talab kam bo'lgan oylardan ortib qolgan mahsulotni talab ko'p bo'lgan oylarigacha saqlab qo'yishi mumkin. Lekin bu holda mahsulotni saqlash uchun qo'shimcha xarajat talab qilinadi. Korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki, har bir oydagi mahsulotga bo'lgan talab to'la qondirilsin hamda mahsulotni ishlab chiqarish va uni saqlashga sarf qilinadigan umumiy xarajatlar minimal bo'lsin.

Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

S_t - t - oyning boshida korxonadagi mahsulotning umumiy miqdori ($t = \overline{1, \tau}$);

$r_t - t$ - oyda mahsulotga bo'lgan talab;

d - bir oylik mahsulotni saqlash uchun sarf qilinadigan xarajatlar;

$x_t - t$ - oyda ishlab chiqariladigan mahsulotning miqdori;

C - bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xarajat.

t - oyda ishlab chiqariladigan mahsulot shu oyda to'liq yoki qisman ishlatiladi deb faraz qilinadi. U holda ishlab chiqariladigan va saqlanadigan mahsulot shu oyda to'liq yoki qisman ishlatiladi deb faraz qilinadi. U holda ishlab chiqariladigan va saqlanadigan mahsulot miqdorini quyidagi ifoda orqali bog'lash mumkin:

$$S_k = S_0 + \sum_{j=1}^k x_j - \sum_{j=1}^k r_j \geq 0, \quad (k = \overline{1,12})$$

bu erda $x_j \geq 0, r_j \geq 0, S_j \geq 0, (j = \overline{1,12})$.

Ishlab chiqarishga va mahsulotni saqlashga sarf qilinadigan xarajatlar quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum_{j=1}^{12} S_j d + \sum_{j=1}^{12} c y_j,$$

bu erda $y_j - z_j = x_j - x_{j-1}, y_j \geq 0, z_j \geq 0$ hamda $y_j - j$ oyda ishlab chiqarishni kengaytirish, z_j esa j oyda ishlab chiqarishni qisqartirishni ko'rsatadi. Agar d va C o'zgarmas sonlar bo'lsa, $\frac{C}{d}$ ni λ bilan belgilab, chiziqli funktsiyasi

$$t(S, y) = \sum_{j=1}^{12} (S_j + \lambda y_j)$$

ko'rinishda bo'lgan masalani hosil qilamiz. Bu masalani chiziqli dasturlash masalasi singari yechish mumkin. Agar d va c o'zgaruvchan miqdorlar bo'lsa, $\lambda = \frac{c}{d}$ nisbat c va d larning turli o'zgarish oralig'ida turli qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Bu holda chiziqli funktsiyaning koeffitsientlari masala yechimiga ta'sir qiladi, ya'ni parametrli dasturlash masalasi hosil bo'ladi.

Endi funktsiyasi parametrغا bog'liq bo'lgan masalani yechish usuli bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi parametrli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.18)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (4.19)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (c'_j + \lambda c''_j) x_j \rightarrow \min, \quad (4.20)$$

$$\delta \leq \lambda \leq \varphi, \quad (4.21)$$

bu erda δ, φ - ixtiyoriy haqiqiy sonlar, c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i - berilgan o'zgarmas sonlar.

λ ning o'zgarish sohasidagi har bir qiymati uchun shunday $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorlar topish kerakki, u (4.18) va (4.19) shartlarni qanoatlantirib, (4.20) chiziqli funktsiyani minimumga aylantirsin.

Faraz qilaylik, berilgan masala xosmas masala bo'lib, kamida bitta bazis rejaga ega bo'lsin. U holda simpleks usulni qo'llab, $\lambda = \delta$ uchun masalaning optimal rejasini topish yoki $\lambda = \delta$ da masalaning yechimi mavjud emasligini aniqlash mumkin.

a) hol. $\lambda = \delta$ da masalaning optimal yechimi topilgan bo'lsin. Chiziqli funktsiyaning koeffitsientlari λ ning funktsiyasi sifatida ($c_i = c'_i + \lambda c''_i$) berilganligi sababli ixtiyoriy bazis yechim uchun $\Delta_j = y_j - c_j$ ayirmani ham λ ning funktsiyasi sifatida ifodalash mumkin, ya'ni $z_j - c_j = a_j + \lambda \beta_j$.

Topilgan optimal yechim uchun $\alpha_j + \delta \beta_j \leq 0, (j = \overline{1, n})$ tengsizlik o'rinli. Bu esa

$$\alpha_j + \lambda \beta_j \leq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (4.22)$$

tengsizliklar sistemasining birgalikda ekanligini ko'rsatadi.

Bundan barcha $\beta_j < 0$ uchun

$$\lambda \geq -\frac{a_j}{\beta_j}$$

va barcha $\beta_j > 0$ uchun

$$\lambda \leq -\frac{a_j}{\beta_j}.$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max_{\beta_j < 0} \left(-\frac{a_j}{\beta_j} \right), \\ -\infty, \end{cases} \text{ agar } \beta_j \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \max_{\beta_j < 0} \left(-\frac{a_j}{\beta_j} \right), \\ -\infty, \end{cases} \text{ agar } \beta_j \leq 0 \quad (4.24)$$

U holda (4.18)-(4.21) masalaning $\lambda = \delta$ dagi optimal yechimi λ ning $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ intervaldagi hamma qiymatlari uchun optimal yechim bo'ladi.

Agar $\bar{\lambda} = +\infty$ bo'lsa, λ ning hamma qiymatlari uchun optimal yechim topilgan bo'ladi va ishlash jarayoni tugaydi.

Faraz qilaylik, $\bar{\lambda}$ chekli sonidan iborat bo'lsin ($\bar{\lambda} = -\frac{\alpha_k}{\beta_k}, \beta_k > 0$). Agar barcha

$x_{ik} \leq 0$ bo'lsa, simpleks usulning xossalari ko'ra $\lambda > \bar{\lambda}$ bo'lganda masalaning chiziqli funktsiyasi quyidan chegaralanmagan bo'ladi va agar kamida bitta $x_{ik} \geq 0$ bo'lsa (masalan $x_{ik} > 0$), u holda simpleks usulni qo'llab bazisdan R_l vektor chiqarilib, uning o'rniga P_k vektor kiritiladi. Natijada simpleks jadval o'zgaradi, masalaning yangi yechimi topiladi.

Topilgan yangi yechim uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

1-teorema. Yangi yechim λ ning kamida bitta qiymati uchun optimal yechim bo'ladi va agar u λ ning $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}'$ intervaldagi hamma qiymatlari uchun optimal yechim bo'lsa, u holda

$$\bar{\lambda} = \underline{\lambda}'$$

bo'ladi.

Isbot. Topilgan yangi yechim λ parametrning hech bo'lmaganida bitta qiymat uchun berilgan masalaning echimi bo'ladi va bu yechim uchun

$$\alpha'_j + \lambda \beta'_j \leq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.25)$$

sistema birgalashgan bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\lambda = \bar{\lambda}$ bo'lganda yangi yechim hosil qilish uchun bazisga P_k vektor kiritiladi. P_k vektor uchun esa

$$z_k - c_k = \alpha_k + \bar{\lambda} \beta_k \leq 0$$

tengsizlik o'rinli.

Bundan ko'rinadiki, yangi yechim masalaning $\lambda = \bar{\lambda}$ qiymatidagi optimal yechimi bo'ladi.

Endi har qanday $\lambda < \bar{\lambda}$ (4.25) shartni qanoatlantirmasligini ko'rsatamiz.

Ma'lumki,

$$\begin{cases} \alpha'_l = -\frac{\alpha_k}{x_{lk}}, \\ \beta'_l = -\frac{\beta_k}{x_{lk}}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Faraz qilaylik (4.25) sistemani ixtiyoriy λ qanoatlantirsin. U holda, xususan,

$$\alpha'_l + \lambda \beta'_l \leq 0$$

o'rinli bo'ladi, yoki $x_{lk} > 0$ va (4.26) ga asosan

$$-\alpha_k - \lambda \beta_k \leq 0$$

bo'ladi. Bu erda $\beta_k > 0$ bo'lganligi sababli $\lambda \geq -\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \bar{\lambda}$.

Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan λ ning bir o'zgarish sohasidan ikkinchisiga o'tib borish jarayonini $\lambda = \varphi$ bo'lganga qadar davom ettirish kerak.

Masala xosmas masala bo'lganligi sababli bunday jarayon cheksiz davom etmaydi va λ ning hamma qiymatlari uchun optimal yechim topilganda yoki λ ning ma'lum bir qiymatidan keyingi qiymatlarida masalaning yechimi yo'qligi aniqlanganda jarayon tugallanadi. Ba'zan masalaning ayrim rejalari uchun $\bar{\lambda} = \underline{\lambda}$ bo'lishi mumkin. Parametrning bunday shartini qanoatlantiruvchi qiymatlari uning **kritik** qiymatlari va masalaning bunday shartini qanoatlantiruvchi parametrta mos bo'lgan echimi esa **kritik yechim** deb ataladi.

b) hol. Masala $\lambda = \delta$ da yechimga ega emas. Bu erda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) P_k - bazisga kirishi kerak bo'lgan vektor. Shartga ko'ra $\alpha_k + \delta \beta_k > 0$ va barcha $x_{ik} \leq 0$.

Agar $\beta_k \geq 0$ bo'lsa, u holda masalaning chiziqli funktsiyasi λ ning har qanday qiymati uchun quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

2) $\beta_k < 0$ bo'lsa, $\alpha_k + \delta \beta_k > 0$ tengsizlik λ ning $\lambda < \lambda'_l = -\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ qiymatlari uchun o'rinli

bo'ladi.

Bu holda masala λ ning $\delta \leq \lambda < \lambda'_l$ intervaldagi qiymatlari uchun optimal yechimga ega bo'lmaydi. Lekin bunda $\lambda = \lambda'_l$ bo'lgan xolni tekshirish kerak. Agar

barcha j larda $\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j \leq 0$ bo'lsa, $\lambda = \lambda'_1$ da masalaning optimal yechimi topilgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\lambda_1 = \min_{\beta_j > 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$. Bu holda topilgan yechim λ - ning $\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$

oraliqdagi qiymati uchun optimal yechimi bo'ladi va masalani yechish jarayoni a) holdagidek davom ettiriladi. Agar barcha j lar uchun

$$\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j \leq 0$$

tengsizlik bajarilmasa, bazisga

$$\max_{\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j > 0} (\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j) = \alpha_t + \lambda'_1 \beta_t$$

shartni qanoatlantiruvchi P_t vektor kiritiladi. Bu jarayon hamma j lar uchun $\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j \leq 0$ bo'lguncha yoki $\alpha_t + \lambda'_1 \beta_t$ ga mos keluvchi P_t vektorning barcha komponentalari $x_{it} \leq 0$ bo'lguncha takrorlanadi. Agar hamma j lar uchun $\alpha_j + \lambda'_1 \beta_j \leq 0$ bo'lsa yuqoridagi a) holga qaytamiz, agar $j=t$ uchun $\alpha_t + \lambda'_1 \beta_t > 0$ va $x_{it} \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$) bo'lib, $\beta_t < 0$ bo'lsa, u holda berilgan masalaning chiziqli funktsiyasi

$$\lambda < \lambda'_2 = -\frac{\alpha_t}{\beta_t} (\lambda'_2 < \lambda'_1)$$

uchun quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

Endi $\lambda = \lambda'_2$ bo'lgani holni tekshirish kerak. Agar $\lambda = \lambda'_2$ da masala optimal yechimga ega bo'lsa, ya'ni barcha j lar uchun

$$\alpha_j + \lambda'_2 \beta_j \leq 0$$

bo'lsa, masalani yechish yuqoridagidek davom ettiriladi. Agar $\lambda = \lambda'_2$ qiymatda masala yechimga ega bo'lmasa, yuqorida ko'rgan 1) va 2) holdan birortasi yuz berishi mumkin. Agar 1) hol bajarilsa $\lambda \geq \lambda'_2$ uchun masala yechimga ega bo'lmaydi; agar 2) hol bajarilsa, λ ning ma'lum bir intervaldagi qiymatlari uchun masala yechimga ega bo'lmaydi.

Shunday yo'l bilan λ ning barcha qiymatlari tekshirilib chiqiladi.

Misol. Quyidagi parametrli dasturlash masalasini yeching:

$$Y = (2+3\lambda)x_1 + (-1+2\lambda)x_2 + 3\lambda x_3 + 4x_4 \rightarrow \max,$$

$$-\infty < \lambda < +\infty,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 15, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, 4}).$$

Berilgan masalani x_5, x_6, x_7 qo'shimcha o'zgaruvchilar bilan to'ldiramiz va $\max Y$ ni $\min Y$ ga aylantiramiz. Natijada quyidagi kanonik formadagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 &= 15, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 &= 2, \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 7}, \end{aligned}$$

$$Y = (2 + 3\lambda)x_1 - (-1 + 2\lambda)x_2 - 3\lambda x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ -\infty < \lambda < +\infty.$$

Bu masaladagi P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, simpleks jadvalni to'ldiramiz. Har bir P_j ustunga mos keluvchi $\Delta_j = y_j - c_j$ ni

$$\Delta_j = \alpha_j + \lambda \beta_j$$

ko'rinishida ifodalaymiz hamda jadvalning $m+1$ qatoriga α_j ni va $m+2$ qatoriga β_j ni joylashtiramiz. λ ning quyi chegarasi uchun masalaning optimal yechimini topamiz. Bunday yechim uchun barcha $\beta_j \geq 0, j = \overline{1,7}$, bo'lishi kerak.

Bu holda

$$\Delta_j = \alpha_j + \lambda \beta_j \leq 0.$$

Demak, $\lambda = -\infty$ uchun optimal yechim topilgan bo'ladi. Birinchi simpleks jadvaldan ko'rinadiki P_5, P_6, P_7 bazis vektorlarga mos keluvchi $X_I = (0; 0; 0; 0; 7; 15; 2)$ berilgan masalaning $\lambda = -\infty$ qiymati uchun optimal yechim bo'ladi. Bu yechim λ ning qaysi intervaldagi qiymatlari uchun optimal yechim bo'lishini aniqlaymiz.

Buning uchun λ ning yuqori chegarasini topamiz.

$$\bar{\lambda} = \min_{\beta_j > 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) = \min \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0 \right) = -\frac{2}{3}.$$

Demak, $X_I = (0; 0; 0; 0; 7; 15; 2)$ yechim λ ning $-\infty < \lambda \leq -\frac{2}{3}$ intervaldagi hamma qiymatlari uchun optimal yechim bo'ladi.

Endi $\lambda > -\frac{2}{3}$ uchun optimal yechimini topamiz. Buning uchun bazisga P_I vektorni kiritib

$$\theta = \min_{x_{1j} > 0} \frac{x_j}{x_{1j}} = \min \left(\frac{7}{1}, \frac{2}{2} \right) = 1$$

songa mos keluvchi P_7 vektorni bazisdan chiqaramiz. Natijada II simpleks jadval hosil bo'ladi. Bu jadvaldagi P_5, P_6, P_7 bazis vektorlarga mos keluvchi $X_I = (1; 0; 0; 0; 6; 18; 0)$ yechim $\lambda > -\frac{2}{3}$ uchun optimal echim bo'ladi (teoremaga asosan). Bu yechim λ ning

$$-\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}' = -\frac{8}{19}$$

intervaldagi hamma qiymatlari uchun ham optimal echim bo'ladi.

Endi $\lambda > -\frac{8}{19}$ uchun optimal echimni aniqlaymiz.

Buning uchun

$$\bar{\lambda} = \min_{\beta_j > 0} \frac{-\alpha_j}{\beta_j} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} = -\frac{8}{19}$$

ga mos keluvchi P_2 vektorni bazisga kiritib, P_5 vektorni bazisdan chiqaramiz. Natijada III simpleks jadval hosil bo'ladi. Bunda P_2, P_6, P_1 vektorlar bazis vektorlar bo'lib, ularga mos kelgan $X_2 = \left(\frac{13}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0; 0; \frac{68}{3}; 0\right)$ vektor $\lambda = -\frac{8}{19}$ uchun masalaning optimal yechimi bo'ladi. Bunda $Y(X_3) = -(42/57)$. Bu jadvalda $m+2$ qatorning barcha elementlari manfiy sonlardan iborat, ya'ni barcha $\beta_j \leq 0, (j = \overline{1,7})$.

Demak, topilgan yechimi λ ning

$$-\frac{8}{19} \leq \lambda < +\infty$$

intervaldagi hamma qiymatlari uchun optimal yechim bo'ladi.

I.

B.v.	C	P_0	$-2 - 3\lambda$	$1 - 2\lambda$	-3λ	-4	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	7	1	2	1	3	1	0	0
P_6	0	15	-3	4	3	-1	0	1	0
P_7	0	2	2	-5	2	2	0	0	1
$m+1$		0	2	-1	0	4	0	0	0
$m+2$		0	3	2	3	0	0	0	0

II

P_5	0	6	0	9/2	0	2	1	0	-1/2
P_6	0	18	0	-7/5	6	2	0	1	3/2
P_1	$-2 - 3\lambda$	1	1	-5/2	1	1	0	0	1/2
$m+1$		-2	0	4	-2	2	0	0	-1
$m+2$		-3	0	19/2	0	-3	0	0	-3/2

III

P_2	$1 - 2\lambda$	4/3	0	1	0	4/9	2/9	0	-1/9
P_6	0	68/3	0	0	6	32/9	7/9	1	10/9
P_1	$-2 - 3\lambda$	13/3	1	0	1	19/9	5/9	0	2/9
$m+1$		-22/3	0	0	-2	2/9	-8/9	0	-1/3
$m+2$		-47/3	0	0	0	-65/9	-19/9	0	-4/9

3-§. Ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala (ikkilangan parametrlilik masalasi)

Ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala bilan chiziqli funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala o'zaro qo'shma masalalar bo'ladi. Ularning ixtiyoriy birini yechib ikkinchisining ham yechimini aniqlash mumkin.

Funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masalaga ikkilangan masalaning ozod hadi t parametrga bog'liq bo'ladi ($\alpha \leq t \leq \beta, \alpha, \beta$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar).

Bu paragrafda ana shunday ikkilangan parametrli dasturlash masalasini yechish usuli bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, quyidagi ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i + t b'_i, (i = \overline{1, m}), t \in [\alpha, \beta], \quad (4.27)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (4.28)$$

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min. \quad (4.29)$$

$\alpha \leq t \leq \beta$ intervaldagi t ning har bir qiymati uchun (4.27) va (4.28) shartlarni qanoatlantiruvchi shunday $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorni topish kerakki, u (4.29) chiziqli funktsiyaga minimal qiymat bersin.

Faraz qilaylik, $t = \alpha$ da masalaning $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ optimal rejasi topilgan bo'lsin. Masaladagi b_i ozod hadlar t parametrga bog'liq bo'lgani sababli $\bar{X} (\bar{X} = B^{-1}b)$ vektorning komponentalarini α ning chiziqli funktsiyasi sifatida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\bar{x}_i = q_i + \alpha p_i$$

Shartga ko'ra $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ $t = \alpha$ dagi optimal yechim. Shuning uchun

$$\bar{x}_i = q_i + \alpha p_i \geq 0$$

bo'lishi kerak va demak,

$$q_i + t p_i \geq 0 \quad (4.30)$$

tengsizliklar sistemasi birgalikda bo'ladi.

Bu erda 4 ta hol ro'y berishi mumkin:

- 1) Agar (4.30) ifodada barcha $p_i = 0$ bo'lsa, u holda topilgan $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ reja t ning ixtiyoriy qiymatlari uchun optimal reja bo'ladi;
- 2) (4.30) da barcha $p_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$). Bu holda topilgan \bar{X} reja ixtiyoriy $\alpha \leq t$ uchun optimal reja bo'ladi;
- 3) Agar (4.30) da barcha $p_i \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$) bo'lsa, u holda topilgan reja \bar{X} ixtiyoriy $t \leq \alpha$ uchun optimal reja bo'ladi;
- 4) (4.30) ifodadagi p_i lardan ba'zilar musbat, ba'zilar esa manfiy bo'lishi mumkin.

Agar $p_i > 0$ bo'lsa, (4.30) dan $t \geq -\frac{q_i}{p_i}$.

Xuddi shuningdek, agar $p_i < 0$ bo'lsa, u holda $t \leq -\frac{q_i}{p_i}$.

Endi quyidagilarni qabul qilamiz

$$t = \begin{cases} \max_{p_i > 0} \left(-\frac{q_i}{p_i} \right), \\ -\infty \end{cases} \text{ agar } p_i \leq 0. \quad (4.31)$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min_{p_i < 0} \left(-\frac{q_i}{p_i} \right), \\ +\infty \end{cases} \quad \text{agar hamma } p_i \geq 0. \quad (4.32)$$

Bunda topilgan \bar{X} reja t ning $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ intervaldagi har bir qiymati uchun optimal reja bo'ladi. Agar $\bar{t} = +\infty$ bo'lsa, t ning hamma qiymatlari uchun optimal yechim topilgan bo'ladi va masalani yechish jarayoni to'xtatiladi. Faraz qilaylik, $\bar{t} \neq +\infty$ da

$$\bar{x}_i = q_i + tp_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.33)$$

va

$$y_j - c_j \leq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.34)$$

shartlar bajarilsin. Boshqacha aytganda \bar{X} vektor optimallik shartini qanoatlantirsin. Lekin, shuni aytib o'tish kerakki, (4.33), (4.34) shartlarni qanoatlantiruvchi \bar{X} vektor optimal yechim bo'lmasligi ham mumkin. t ning qiymatini oshirib borish natijasida birorta t uchun, masalan $t=C$ uchun $\bar{x}_l = q_l + tp_l < 0$ bo'lishi mumkin.

U holda

$$\bar{t} = -\frac{q_l}{p_l} \quad (p_l < 0)$$

bo'ladi. Endi $t > \bar{t}$ uchun yangi optimal yechimni aniqlash kerak. Buning uchun bazisga kiradigan va bazisdan chiqadigan vektorlarni tanlash kerak. Bu vektorlar quyidagi teorema asosan tanlanadi:

Teorema. Agar $\bar{t} = -\frac{q_l}{p_l}$ ga mos keluvchi p_l vektor bazisdan chiqarilib, bazisga

$$\frac{y_k - c_k}{x_{lk}} = \min_{x_{lj} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{lj}}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni kiritilsa, hosil bo'lgan yangi yechim \bar{X}' t ning hech bo'lmaganda bitta qiymati uchun optimal yechim bo'ladi. Agar \bar{X}' t ning $\underline{t}' \leq t \leq \bar{t}'$ intervaldagi qiymatlari uchun optimal yechim bo'lsa, u hosila $\bar{t} = \bar{t}'$ bo'ladi.

Isbot. Simpleks jadvaldagi ozod hadlardan tashkil topgan p_0 vektorning yangi bazis vektorlar orqali yoyilmasi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$\bar{x}_i = q'_i + tp'_i = q_i + tp_i - \frac{x_{ik}}{x_{lk}}(q_l + tp_l), i \neq l,$$

$$\bar{x}'_k = q'_k + tp'_k = \frac{q_l + tp_l}{x_{lk}}$$

\bar{X}' vektor $t = \bar{t}' = -\frac{q_l}{p_l}$ uchun optimal rejadir va agar \bar{X}' birorta boshqa t uchun

ham reja bo'lsa, u holda $t \geq \bar{t}$ bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$\frac{q_l + tp_l}{x_{lk}} \geq 0, x_{lk} \leq 0, p_l < 0$$

Bundan

$$t \geq -\frac{q_l}{p_l} = \bar{t} \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Endi yangi rejani optimal yechim ekanligini ko'rsatamiz. Ma'lumki,

$$(y_j - c_j)' = y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k).$$

Bunda $y_j - c_j \leq 0, x_{lk} < 0$ bo'lgani sababli, $x_{lj} > 0$ bo'lganda $(y_j - c_j)' \leq 0$ bo'ladi, ya'ni

$$y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k) \leq 0.$$

Bundan $x_{lj} > 0$ uchun

$$y_j - c_j \leq \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k)$$

yoki

$$\frac{y_j - c_j}{x_{lj}} \geq \frac{y_k - c_k}{x_{lk}}.$$

Demak, bazisga kiritiladigan P_k vektor uchun

$$\min_{x_{lj} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{y_k - c_k}{x_{lk}}$$

shart qanoatlantirilishi kerak.

Agar barcha $x_{lj} > 0$ bo'lsa, u xolda $t > \bar{t}$ uchun masala yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. Ozod hadi parametr ga bog'liq bo'lgan chiziqli dasturlash masalasini yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 1 - 2t, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 20 - t, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 5 + 3t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}),$$

$$-\infty < t < +\infty$$

$$Y = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \rightarrow \max.$$

Yechish. Berilgan masalaga qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz va $Y \rightarrow \max$ ni $Y \rightarrow \min$ ga aylantiramiz. Natijada kanonik formadagi masalaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 - 2t, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 = 20 - t, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 5 + 3t. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,7}),$$

$$-\infty < t < +\infty$$

$$Y = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min.$$

Hosil bo'lgan masaladagi P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, simpleks jadvalni to'ldiramiz va simpleks usuli yordami bilan $t = -\infty$ uchun optimal yechimni topamiz.

IV bosqichda $t = -\infty$ uchun optimal yechim topildi. Bu yechim:

$$X_1 = \left(5 - \frac{14}{17}t; 5 - \frac{1}{17}t; 0; 0; -14 - \frac{5}{17}t; 0; 0 \right)$$

$$Y_1 = y(X_1) = -5 - \frac{12}{17}t.$$

$$(4.32) \text{ ga asosan } \bar{t} = \min \left(\frac{5}{\frac{14}{17}}; \frac{-14}{\frac{5}{17}}; \frac{5}{\frac{1}{17}} \right) = \min \left(\frac{85}{14} - \frac{238}{5}; 85 \right) = -\frac{238}{5} \text{ ga mos bo'lgan } P_5$$

vektorni bazisdan chiqarib, bazisga $\min_{x_5 < 0} \frac{\Delta_j}{x_5}, (j = \overline{1,7})$ nisbatni beruvchi P_6 vektorni kiritamiz.

Natijada III bosqichda topilgan

$$X_2 = \left(-\frac{13}{14}t; 1 - \frac{1}{7}t; 0; 0; 0; 17 + \frac{5}{14}t; 0 \right)$$

vektor $t = -\frac{238}{5}$ uchun optimal yechim bo'ladi. (4.32) ga asosan

$$\bar{t}' = \min \left(\frac{0}{\frac{13}{14}}; \frac{1}{\frac{1}{17}} \right) = 0$$

Demak, $\bar{t}' = -\frac{q_1}{p_1} = 0$ bo'lganligi sababli, unga mos keluvchi P_1 vektorni bazisdan chiqarib, bazisga

$$\min_{x_{1j} < 0} \frac{\Delta_j}{x_{1j}} = \min_{x_{1j} < 0} \frac{y_j - c_j}{x_{1j}} = \frac{y_3 - c_3}{x_{13}} = \frac{23}{13}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_3 vektorni kiritamiz. Hosil bo'lgan

$$X_3 = (0; 1; +t; t; 0; 0; 17 - 8t; 0)$$

vektor masalaning $t=0$ dagi optimal yechimi va bu yechimdagi maqsad funktsiyaning qiymati $u_3 = -2 + t$ ga teng. Bu reja t ning

$$0 \leq t \leq \bar{t}'' = \frac{17}{8}$$

intervaldagi barcha qiymatlari uchun optimal reja bo'ladi. Endi \bar{t}'' ga mos keluvchi P_6 vektorni bazisdan chiqaramiz va P_7 ni bazisga kiritamiz. Natijada hosil bo'lgan

$$X_4 = (0; \frac{64}{13} - \frac{11}{13}t; \frac{17}{13} + \frac{5}{13}t; 0; 0; 17 + 8t)$$

vektor masalaning $t = \frac{17}{8}$ dagi optimal yechimi bo'ladi. Bunda

$$y_4 = y(X_4) = -\frac{77}{13} + \frac{37}{13}t.$$

Bu yechim t ning

$\frac{17}{8} \leq t \leq \frac{64}{11}$ intervaldagi barcha qiymatlari uchun optimal yechim bo'ladi. Lekin

$\bar{t}''' = -\frac{q_2}{p_2} = \frac{64}{11}$ ga mos keluvchi barcha $x_{2j} \geq 0$ bo'lganligi

cababli, masala $t > \frac{64}{11}$ yechimga ega bo'lmaydi.

I.

$B.v.$	C	P_0	1	-2	3	1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$1-2t$	2	1	-3	1	1	0	0
P_6	0	$20-t$	1	3	4	2	0	1	0
P_7	0	$5+3t$	-4	5	-2	3	0	0	1
Δ_j		0	-1	2	-3	-1	0	0	0

II.

P_5	0	$-\frac{13}{5}t$	$\frac{14}{5}$	0	$-\frac{13}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
P_6	0	$17-\frac{5}{14}t$	$\frac{17}{5}$	0	$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$
P_2	-2	$1+\frac{3}{5}t$	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
Δ_j		$-2-\frac{6}{5}t$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$

III.

P_5	1	$-\frac{13}{5}t$	1	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{1}{14}$
P_6	0	$17+\frac{5}{14}t$	0	0	$\frac{117}{14}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{17}{14}$	1	$-\frac{5}{14}$
P_2	-2	$1-\frac{1}{7}t$	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
Δ_j		$-2-\frac{9}{14}t$	0	0	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{13}{14}$	0	$-\frac{5}{14}$
$\frac{\Delta_j}{x_{6j}}$							$\frac{3}{17}$		

IV.

P_5	1	$5 - \frac{14}{17}t$	1	0	$\frac{26}{17}$	$\frac{1}{17}$	0	$\frac{5}{17}$	$-\frac{3}{17}$
P_5	0	$-14 - \frac{5}{17}t$	0	0	$-\frac{117}{17}$	$\frac{4}{17}$	1	$-\frac{14}{17}$	$\frac{5}{17}$
P_2	-2	$5 - \frac{1}{17}t$	0	1	$\frac{14}{17}$	$\frac{11}{17}$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{1}{17}$
$m+1$		$-5 - \frac{12}{17}t$	0	0	$-\frac{53}{17}$	$-\frac{38}{17}$	0	$-\frac{3}{17}$	$-\frac{5}{17}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$					$\frac{53}{117}$			$\frac{3}{17}$	

V.

P_5	1	$-\frac{13}{14}t$	1	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{1}{14}$
P_6	0	$17 + \frac{5}{14}t$	0	0	$\frac{117}{14}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{17}{14}$	1	$-\frac{5}{14}$
P_2	-2	$1 - \frac{1}{7}t$	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
Δ_j		$-2 - \frac{17}{14}t$	0	0	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{3}{14}$	0	$-\frac{5}{14}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$					$\frac{23}{13}$				5

VI.

P_3	3	t	$-\frac{14}{13}$	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{5}{13}$	0	$\frac{1}{13}$
P_6	0	$17-18t$	9	0	0	1	2	1	-1
P_2	-2	$1+t$	$-\frac{16}{13}$	1	0	$\frac{7}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$\frac{3}{13}$
Δ_j		$-2+t$	$-\frac{23}{13}$	0	0	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{11}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$									$\frac{3}{13}$

VII.

P_3	3	$\frac{17}{13} + \frac{5}{13}t$	$-\frac{5}{13}$	0	1	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	0
P_7	0	$17-18t$	-9	0	0	-1	-2	-1	1
P_2	-2	$\frac{64}{13} - \frac{11}{13}t$	$\frac{11}{13}$	1	0	$\frac{10}{13}$	$\frac{4}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0
Δ_j		$-\frac{77}{13} + \frac{37}{13}t$	$-\frac{50}{13}$	0	0	$-\frac{36}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0

Tayanch so'z va iboralar

Parametrli dasturlash; funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala; ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala; parametrning kritik qiymatlari; kritik yechim

Nazorat savollari

1. Parametrli dasturlash masalasining predmeti nima?
2. Parametrli dasturlash masalalarining qanday turlari mavjud?
3. Funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala qanday qo'yiladi?
4. Ozod hadlari parametrga bog'liq bo'lgan masala qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Parametrli dasturlash masalasining qanday umumlashtirilgan hollarini bilasiz?
6. Parametrli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
7. Mahsulotni ishlab chiqarish va uni saqlashni optimallashtirish masalasining matematik modelini tuzing va uni funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala sifatida ifodalang.
8. Funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masalani yechish jarayonini tavsiflang.
9. Parametrning ma'lum bir qiymatida topilgan yechim uchun qanday teorema o'rinli bo'ladi?
10. Funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masalani yechish jarayonini qanday hollarda to'xtatish mumkin?
11. Ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala bilan funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masala orasida qanday bog'lanish bor?
12. Ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masalani yechish algoritmini tavsiflang.
13. Ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masalani yechishda parametrning bir qiymatidan boshqa qiymatiga o'tish qanday teorema asosan bajariladi?

Masalalar

I. Parametrli dasturlash masalasining geometrik talqinidan foydalanib, quyidagi masalalarni t parametrning $-\infty < t < \infty$ oraliqdagi barcha qiymatlari uchun yeching.

1.1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 23, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$Y = 6x_1 + (4+t)x_3 + (12-t)x_4 \rightarrow \max;$$

1.2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$Y = 3x_1 - (3+t)x_2 + (4+t)x_4 \rightarrow \max;$$

II. Quyidagi funktsiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masalalarni analitik usul bilan yeching.

2.1

$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 51,$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Y = 5x_1 + (2+3\lambda)x_2 \rightarrow \max, \lambda \in [0, 10].$$

2.2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}$$

$$Y = 2\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - 3x_3 + \lambda x_4 + 2x_5 - 3\lambda x_6 \rightarrow \max, \lambda \in [0, 10].$$

2.3

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}$$

$$Y = (1-2\lambda)x_1 + \lambda x_2 + x_3 - (2-\lambda)x_4 \rightarrow \max, -\infty < \lambda < +\infty.$$

III. Quyidagi ozod hadi parametrğa bog'liq bo'lgan masalalarni yeching.

$$3.1 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 10 + 3t, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 - t, \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 2 + 5t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$Y = 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \max.$$

$$3.2 \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq 1 - t, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + 8x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad 0 \leq t \leq +\infty,$$

$$Y = 7x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \max.$$

$$3.3 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \rightarrow \max.$$

V-BOB. TRANSPORT MASALASI

Transport masalasi chiziqli dasturlash masalalari ichida nazariy va amaliy nuqtai nazardan eng yaxshi o'zlashtirilgan masalalardan biri bo'lib, undan sanoat va qishloq xo'jalik mahsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffaqiyatli ravishda foydalanilmoqda.

Transport masalasi maxsus chiziqli dasturlash masalalari sinfiga tegishli bo'lib, uning chegaralovchi shartlaridagi koeffitsientlardan tuzilgan (a_{ij}) matritsaning elementlari 0 va 1 raqamlardan iborat bo'ladi va har bir ustunda faqat ikkita element 0 dan farqli, qolganlari esa 0 ga teng bo'ladi. Transport masalasini yechish uchun uning maxsus xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, quyida biz ular bilan tanishamiz.

1-§. Transport masalasining matematik modeli va xossalari

Faraz qilaylik, A_1, A_2, \dots, A_m punktlarda bir xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Ma'lum bir vaqt oralig'ida har bir $A_i (i=1, m)$ punktda ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori a_i birlikka teng bo'lsin. Ishlab chiqariladigan mahsulotlar B_1, B_2, \dots, B_n punktlarda iste'mol qilinsin hamda har bir $B_j (j=1, n)$ iste'molchining ko'rilayotgan vaqt oralig'ida mahsulotga bo'lgan talabi $b_j (j=1, n)$ birlikka teng bo'lsin.

Bundan tashqari A_1, A_2, \dots, A_m punktlarda ishlab chiqariladigan mahsulotlarning umumiy miqdori B_1, B_2, \dots, B_n punktlarning mahsulotga bo'lgan talablarining umumiy miqdoriga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz kilamiz. Deylik, har bir ishlab chiqarish punkti A_i dan hamma iste'mol qiluvchi punktga mahsulot tashish imkoniyati mavjud, hamda A_i punktdan B_j punktga mahsulotni olib borish uchun sarf qilinadigan xarajat C_{ij} pul birligiga teng bo'lsin.

x_{ij} bilan rejalashtirilgan vaqt oralig'ida A_i punktdan B_j punktga olib boriladigan mahsulotning umumiy miqdorini belgilaymiz.

Transport masalasining berilgan parametrlarini va belgilangan noma'lumlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz.

1-jadval.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	\dots	B_n	Taklif miqdori
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	\dots	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2n} X_{2n}	a_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	\dots	C_{mn} X_{mn}	a_m
talab miqdori	b_1	b_2	\dots	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki: 1) har bir ishlab chiqarish punktidagi mahsulotlar to'la taqsimlansin ; 2) har bir iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi to'la qanoatlantirsin va shu bilan birga sarf qilinadigan yo'l xarajatlarining umumiy qiymati minimal bo'lsin.

Masalaning birinchi shartini quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \end{cases} \quad (5.1)$$

Masalaning ikkinchi sharti esa quyidagi tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \quad (5.2)$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_{ij} > 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (5.3)$$

i -ishlab chiqarish punktidan j -iste'mol qiluvchi punktga rejadagi x_{ij} birlik mahsulotni etkazib berish uchun sarf qilinadigan yo'l xarajati c_{ij} x_{ij} pul birligiga teng bo'ladi.

Rejadagi barcha mahsulotlarni tashish uchun sarf qilinadigan umumiy yo'l xarajatlari

$$Y = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

funktsiya orqali ifodalanadi. Masalaning shartiga ko'ra bu funktsiya minimumga intilishi kerak, ya'ni

$$Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.4)$$

(5.1) - (5.4) munosabatlar birgalikda transport masalasining matematik modeli deb ataladi.

Transport masalasining matematik modelini quyidagi yig'indi ko'rinishida ham yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (5.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (5.7)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.8)$$

Masaladagi har bir a_i, b_j va c_{ij} nomanfiy sonlar, ya'ni:

$$a_i \geq 0, b_j \geq 0, c_{ij} \geq 0.$$

Agar (5.5.) - (5.8.) masalada

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A \quad (5.9)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig'indisi unga bo'lgan talablar yig'indisiga teng bo'lsa, u holda bu masalani yopiq modelli transport masalasi deb aytamiz.

1-teorema. Har kandy yopiq modelli transport masalasi yechimga ega.

Isbot. Shartga ko'ra $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A > 0$, u holda

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

berilgan transport masalasining rejasi bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geq 0, \text{ chunki } a_i \geq 0, b_j \geq 0, A > 0.$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^n b_j = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^m a_i = b_j.$$

Demak, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ transport masalasining hamma shartlarini qanoatlantiradi.

Shuning uchun bu miqdor masalaning rejasi bo'ladi.

2-teorema. Transport masalasining shartlaridan tuzilgan matritsaning $r(A)$ rangi $m+n-1$ ga teng.

Isbot. 1- teorema asosan masalaning kamida bitta rejasi mavjuddir. (5.5), (5.6) shartlardagi koeffitsientlar va barcha a_i, b_i lar musbat butun son bo'lganligi sababli x_{ij} ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va uning qiymati mos a_i , va b_j larning qiymatidan oshmaydi.

Shunday qilib, transport masalasi rejalaridan tashkil topgan to'plam bo'sh to'plam bo'lmaydi, u chegaralangan to'plam bo'ladi. Demak, transport masalasi optimal rejaga ega.

2-§. Transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish usullari

Boshqa chiziqli dasturlash masalalari singari transport masalasini yechish jarayoni boshlang'ich bazis rejani topishdan boshlanadi. Transport masalasining bazis rejasini topish usullari ko'p bo'lib, quyida biz "shimoliy-g'arb burchak" usuli va "minimal harajatlar" usuli bilan tanishamiz.

1. Shimoliy-g'arb burchak usuli. Faraz qilaylik, transport masalasining shartlari quyidagi jadvalga joylashtirilgan bo'lsin.

$b_j \backslash a_i$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Shimoliy-g'arb burchak usulining g'oyasi quyidagilardan iborat. Eng avval shimoliy-g'arbdagi joylashgan katakchadagi x_{11} noma'lumning qiymatini aniqlaymiz, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Agar $a_1 \leq b_1$ bo'lsa $x_{11} = a_1$ va $x_{1j} = 0, (j = \overline{2, n})$, agar $b_1 \leq a_1$ bo'lsa $x_{11} = b_1$ va $x_{i1} = 0, (i = \overline{2, m})$ bo'ladi. Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilsin. Bu holda 1-qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1-qadam

$x_{11} = a_1$	0	0	...	0	0
x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}	a_2
...
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}		x_{mn}	a_m
$b_1 - a_1$	b_2	b_3	...	b_n	

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementning qiymatini topamiz:

Agar $a_2 > b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = b_1 - a_1$ va $x_{i1} = 0, (i = \overline{3, m})$,

Agar $a_2 < b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = a_2$ va $x_{2j} = 0, (j = \overline{2, n})$.

Faraz qilaylik, yangi matritsa uchun ham 1-hol bajarilsin, u holda 2-qadamdagi yechimlar matritsasi quyidagigacha bo'ladi.

$x_{11}=a_1$	0	0	...	0	0
$x_{21}=b_1-a_1$	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	$a_2-b_1+a_1$
0	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	a_3
...
0	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}	a_m
0	b_2	b_3	...	b_n	

Xuddi shunday yo'l bilan davom etib, har bir qadamda birorta x_{ij} ning qiymati topiladi. $x_{ij}=\min(a_i, b_j)$ va a_i yoki b_j nolga aylantiriladi.

Bu jarayon barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha takrorlanadi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordami bilan topiladi, shuning uchun a_i va b_j lar butun bo'lganda topilgan bazis reja butun sonli bo'ladi. Bundan tashqari, yuqoridagi 2-teoremaga asosan bazis yechimdagi noldan farkli x_{ij} noma'lumlar soni $m+n-1$ dan oshmaydi.

Misol. quyidagi transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini toping.

$b_j \backslash a_i$	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

1-qadam.

$$x_{11}=\min(4,3)=3.$$

Shuning uchun $b'_1=0$ va $a_1=4-3=1$, $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$

2-qadam.

$$x_{12}=\min(1,6)=1.$$

Bunda $a'_1=0$ va $b'_2=6-1=5$, $x_{13}=x_{14}=0$.

3-qadam.

$$x_{22}=\min(2,5)=2.$$

Bunda $a'_2=0$ va $b'_2=5-2=3$, $x_{23}=x_{24}=0$.

4-qadam.

$$x_{32}=\min(3,3)=3.$$

Bunda $a''_2=b''_2=0$ bo'ladi hamda $x_{33}=x_{34}=0$, $x_{42}=0$.

5-qadam.

$$x_{43}=2, a'_4=3-2=1.$$

6-qadam.

$$x_{44}=\min(1,1)=1$$

Bunda $a'_4=b'_4=0$ bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi. Topilgan boshlang'ich bazis yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$b_j \backslash a_i$	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

Topilgan boshlang'ich bazis yechimdagi noldan farqli bo'lgan noma'lumlar soni 6 ta bo'lib, y $m+n-1=7$ dan kichik. Agar masalaning bazis rejadagi noldan farqli bo'lgan x_{ij} noma'lumlar soni $m+n-1$ dan kichik bo'lsa, bunday rejani xos reja deb ataymiz. Xos rejani to'g'rilash usullari bilan keyinroq tanishamiz.

II. Minimal xarajatlar usuli. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun kerak bo'ladigan iteratsiyalar soni boshlang'ich bazis yechimini tanlashga bog'liqdir. Optimal yechimga yaqin bo'lgan bazis yechimni topish masalaning optimal yechimini topishni tezlashtiradi. Yuqoridagi «shimoliy-g'arb burchak» usuli transport masalasining bazis yechimini ixtiyoriy ravishda, transport harajatlarini nazarga olmagan holda aniqlaydi. Bunday usul yordami bilan topilgan ko'pgina bazis yechim optimal yechimdan yiroq bo'lib, optimal yechimni topish uchun juda ko'p iteratsiyalarni bajarishga to'g'ri keladi.

Adabiyotda transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish uchun transport xarajatlarini nazarga oluvchi ko'p usullar ma'lum(ustundagi minimal element usuli, minimal xarajatlar usuli, ikki tomonlama tanlash usuli va hokazolar).Ularning hammasi transport xarajatlarini nazarga oluvchi usullaridir.

Minimal xarajatlar usulining g'oyasi quyidagilardan iborat:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan matritsa belgilab olinadi, ya'ni

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Bu matritsaning minimal elementini topib belgilaymiz:

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$$

U holda $x_{i_1 j_1}$ quyidagicha aniqlanadi

$$x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1}).$$

Bu erda ikki hol bo'lishi mumkin:

- 1) $a_{i_1} < b_{j_1}$
- 2) $a_{i_1} > b_{j_1}$

Birinchi holda $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ bo'lganda qatorning barcha $x_{i_1 j}$ ($j \neq j_1$) elementlari 0 ga teng, ya'ni

$$x_{i_1 j} = 0, (j \neq j_1)$$

bo'ladi, bunday holda i_1 qator o'chiriladi deb aytamiz. Ikkinchi holda $x_{i j_1} = b_{j_1}$ va j_1 ustunning barcha x_{ij_1} ($i \neq i_1$) elementlari 0 ga teng, ya'ni

$$x_{ij_1} = 0, (i \neq i_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunday holda j_1 ustun o'chiriladi deb aytamiz.

2. Faraz qilaylik, C' matritsa C matritsaning i_1 qatorini (1-hol) yoki j_1 ustunini (2-hol) o'chirish natijasida hosil bo'lgan matritsa bo'lsin. Yangi matritsa uchun

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, & i \neq i_1 \\ a_i - x_{i_1 j_1}, & i = i_1 \end{cases}, \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, & j \neq j_1 \\ b_j - x_{i_1 j_1}, & j = j_1 \end{cases}$$

bo'lsin.

Ma'lumki, C' matritsada ustun va qatorlar soni C matritsanikeydan bittaga kam bo'ladi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi C matritsa uchun bajarilgan ishlar C' matritsa va $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$ miqdorlar uchun bajariladi. Natijada rejalardan tashkil topgan $X=(x_{ij})$ matritsaning yana bir qatori yoki ustuni to'ldiriladi. Bu jarayon C matritsaning hamma qator va ustunlari o'chirilguncha, ya'ni X matritsaning hamma qator va ustunlari to'ldirilguncha takrorlanadi.

m ta ishlab chiqaruvchi punktni n ta iste'mol qiluvchi punktga bog'lovchi transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish uchun minimal xarajatlar usulida $n+m-1$ ta qadamdan iborat ishlarni bajarish kerak bo'ladi.

Misol. Berilgan transport masalasining bazis rejasini minimal xarajatlar usulidan foydalanib toping.

$a_i \backslash b_j$	5	9	9	7
11	7	8 3	5 1	3 7
11	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2

$$1. \min_{i,j} c_{ij} = c_{33} = 1$$

$$x_{33} = \min(a_3, b_3) = \min(8, 9) = 8.$$

Bu holda $x_{3j} = 0, (j \neq 3)$ bo'ladi. Boshqacha aytganda 3-qator o'chiriladi va yangi C' matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsada

$$a_3' = 8 - 8 = 0,$$

$$b_3' = 9 - 8 = 1$$

bo'lib, C' matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C^I = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. C^I matritsadagi elementlar ichida eng kichigini topamiz, ya'ni

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 2.$$

U holda $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(11, 5) = 5$. Demak, $x_{21} = b_1 = 5$.

Shuning uchun $x_{i1} = 0$ ($i \neq 2$) bo'ladi, ya'ni 1-ustun o'chiriladi. Natijada yangi

$$C^{II} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsa uchun $b_1^{(I)} = 5 - 5 = 0$, $a_2^{(I)} = 11 - 5 = 6$.

3. C^{II} matritsaning eng kichik elementi $\min_{i,j} c_{ij} = c_{14} = 3$.

Shuning uchun $x_{14} = \min(a_1, b_4) = \min(11, 7) = 7$. Bu erda 4-ustun o'chiriladi va $a_1^{(I)} = a_1 - x_{14} = 11 - 7 = 4$ bo'ladi. Natijada yangi

$$C^{III} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

4. C^{III} matritsaning elementlari orasida eng kichigi topiladi

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{22} = 4$$

Bu holda,

$$x_{22} = \min(a_2^{(I)}, b_2) = \min(6, 9) = 6.$$

Natijada 2-qator o'chiriladi va b_2 ning qiymati

$$b_2^{(I)} = b_2 - x_{22} = 9 - 6 = 3$$

ga o'zgaradi va yangi C^{IV} matritsa-qator hosil bo'ladi:

$$C^{IV} = (8, 5).$$

Shunday yo'l bilan 5-qadamda $x_{13} = 1$ topilib, 3-ustun o'chiriladi. Hosil bo'lgan X matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa berilgan transport masalasining bazis yechimidir.

2-Misol.

$b_i \backslash a_i$	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5

Bu masalaning transport xarajatlaridan tuzilgan matritsa

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 13 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

dan iborat.

$$1. \min c_{ij} = c_{34} = 5, \\ c_{34} = \min(150, 130) = 130.$$

Demak, 4-ustun o'chiriladi va a_4 ning qiymati $150-130=20$ ga o'zgaradi. Jadvalda bu holni quyidagicha ko'rsatish mumkin.

$a_i \backslash b_j$	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
20	8	10	12	<u>5</u> 130

2. S matritsaning 4-ustunini o'chirish natijasida hosil bo'lgan

$$S^I = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 13 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

matritsaning elementlari ichida eng kichigini $\min c_{ij} = c_{21} = 6$, unga mos keluvchi bazis o'zgaruvchi

$$x_{21} = \min(180, 80) = 80$$

ni aniqlaymiz. Bu holda 1-ustun o'chiriladi va a_2 ning qiymati $150-80=70$ ga o'zgaradi

$a_i \backslash b_j$	0	120	70	0
100	10	7	6	8
70	<u>6</u> 80	8	13	11
20	8	10	12	<u>5</u> 130

3. C^I matritsaning 1-ustunini o'chirish natijasida quyidagi

$$C^{II} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 13 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo'lamiz. Bu matritsaning C_{ij}^{II} elementlari orasida eng kichigini topamiz:

$$\min c_{ij}'' = c_{12}'' = c_{13}'' = 6,$$

$$\text{Demak, } x_{13} = \min(100, 70) = 70.$$

Bu holda S matritsaning 3-ustuni o'chiriladi va a_1 ning qiymati $100-70=30$ ga o'zgaradi:

$a_i \backslash b_j$	80	120	70	130
100	10	7	<u>6</u> 70	8
150	<u>6</u> 80	8	13	11
150	8	10	12	<u>5</u> 130

4. Endi, C matritsaning 1, 3, 4-ustunlarini o'chirish natijasida $C^{III} = (7, 8, 10)$ - vektor-ustunga ega bo'lamiz.

Bu vektorning har bir komponentlarini o'sish tartibida qarab chiqib, ularga mos keluvchi x_{ij} larni aniqlaymiz:

$a_i \backslash b_j$	80	120	70	130
100	10	7 30	6 70	8
150	<u>6</u> 80	8 70	13	11
150	8	10 20	12	<u>5</u> 130

Berilgan masalaning bazis yechimi:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 70 & 0 \\ 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 130 \end{bmatrix}$$

matritsadan iborat bo'ladi.

3-§. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun potentsiallar usuli

Potentsiallar usuli transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari L.V.Kantorovich va M.K.Gavurin tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlashgan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerika olimi Dantsig tomonidan yaratildi. Dantsing usuli chiziqli dasturlashning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul modifitsirlangan taqsimot usuli deb yuritiladi.

Potentsiallar usuli yordami bilan boshlang'ich bazis rejadani boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi bazis rejalarga o'tib borib, chekli sondagi iteratsiyadan so'ng masalaning optimal yechimi topiladi. Har bir iteratsiyada topilgan bazis reja optimal reja ekanini tekshirish uchun har bir ishlab chiqaruvchi (A_i) va iste'mol qiluvchi (B_j) punktga uning potentsiali deb ataluvchi u_i va v_j miqdor mos qo'yiladi. Bu potentsiallar shunday tanlanadiki, bunda o'zaro bog'langan A_i va B_j punktlarga mos keluvchi potentsiallar yig'indisi c_{ij} ga (A_i dan B_j ga birlik mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatiga) teng bo'lishi kerak.

5-teorema. Agar $X^*=(x_{ij}^*)$ reja transport masalasining optimal rejasi bo'lsa, u holda unga

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad (x_{ij}^* > 0), \quad (5.13)$$

$$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij} \quad (x_{ij}^* = 0) \quad (5.14)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $n+m$ ta u_i^* va v_j^* potentsiallar mos kelishi zarur va etarlidir.

Isbot. Etarliligi. Faraz qilaylik, $X^*=(x_{ij}^*)$ reja uchun (5.13), (5.14) shartlar o'rinli bo'lsin. U holda ixtiyoriy $X'=(x_{ij}')$ reja uchun

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij} &\geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^* + v_j^*) x'_{ij} = \sum_{i=1}^m u_i^* \sum_{j=1}^n x'_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j^* \sum_{i=1}^m x'_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{i=1}^m u_i^* \sum_{j=1}^n x_{ij}^* + \sum_{j=1}^n v_j^* \sum_{i=1}^m x_{ij}^* = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^* + v_j^*) x_{ij}^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}^*. \end{aligned}$$

Demak, X^* rejadagi chiziqli funktsiyaning qiymati uning ixtiyoriy X' rejadagi qiymatidan kichik bo'lyapti. Shuning uchun X^* reja optimal bo'ladi.

Zarurligi. Berilgan

[illegible]

[illegible]

$$\mathbf{x}_{ij} \geq 0, \quad (5.17)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.18)$$

transport masalasiga ikkilangan masalani hosil qilish uchun (5.15) sistemadagi har bir tenglamaga potentsiallar deb ataluvchi u_1, u_2, \dots, u_m sonlarni, (5.16) sistemadagi har bir tenglamaga esa v_1, v_2, \dots, v_n sonlarni mos qo'yamiz. U holda, ikkilangan masala quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (5.19)$$

$$f = \sum_{j=1}^n b_j v_j + \sum_{i=1}^m a_i u_i \rightarrow \max. \quad (5.20)$$

Shartga ko'ra $X^* = (x_{ij}^*)$ reja (5.15)-(5.18) masalaning optimal rejasi bo'lganligi sababli, ikkilanish nazariyasiga doir asosiy teorema asosan ikkilangan masala ham optimal

$$z^* = (\bar{u}^*, \bar{v}^*), \\ Y_{\min} = f_{\max}$$

yechimga ega bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^*, \\ x_{ij}^* \geq 0.$$

Ikkilanish nazariyasidan ma'lumki, agar ikkilangan masalaning optimal yechimidagi i -komponenta musbat bo'lsa, berilgan masalaning optimal yechimi i -shartni tenglikka aylantiradi va aksincha, berilgan masalaning optimal yechimidagi i -komponenta nolga teng bo'lsa, ikkilangan masalaning i -sharti tengsizlikdan iborat bo'ladi.

Demak,

$$\begin{cases} u_i^* + v_j^* = c_{ij}, x_{ij}^* > 0, \\ u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}, x_{ij}^* = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

(5.19) ga asosan boshlang'ich bazis reja optimal yechim bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

a) har bir to'ldirilgan (mahsulot taqsimlangan) katakcha uchun

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (5.22)$$

b) har bir bo'sh (mahsulotlar taqsimlanmagan) katakcha uchun

$$u_i + v_j \leq c_{ij}. \quad (5.23)$$

Agar kamida bitta bo'sh katakcha uchun (5.23) shart bajarilmasa, topilgan bazis reja optimal yechim bo'lmaydi va

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \max_{\Delta_{ij} > 0} (u_i + v_j - c_{ij}) = \Delta_{kl}, \quad [\Delta_{ij} = (u_i + v_j - c_{ij})]$$

shartni qanoatlantiruvchi (k, l) katakchani to'ldirilgan katakchaga aylantirish kerak bo'ladi.

Shunday qilib, potentsiallar usulining algoritmi quyidagidan iborat:

1. Yuqoridan ko'rilgan usullarning biridan foydalanib, boshlang'ich bazis reja topiladi.

2. Topilgan rejani optimal reja ekanligini tekshirish

uchun potentsiallar sistemasi tuziladi. Buning uchun (5.19) formuladan foydalanib, har bir to'ldirilgan katakcha uchun (5.22) ko'rinishda potentsial tenglamalar tuziladi. Ma'lumki, transport masalasining rejasidagi 0 dan farqli bo'lgan o'zgaruvchilar soni $n+m-1$ ta. Demak, potentsial tenglamalar sistemasi $n+m$ ta noma'lumli $n+m-1$ tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortiq bo'lgani sababli potentsiallarning son qiymatini topish uchun ulardan ixtiyoriy bittasiga aniq bir qiymat, masalan nol qiymat berib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

Faraz qilaylik, u_i ma'lum bo'lsin, u holda (5.19) dan v_j topiladi:

$$v_j = c_{ij} - u_i$$

Agar v_j ma'lum bo'lsa, u holda u_i quyidagicha topiladi:

$$u_i = c_{ij} - v_j$$

Barcha potentsiallar son qiymatini aniqlab bo'lgach, hamma bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij} = (u_i + v_j - c_{ij})$$

hisoblanadi. Agarda barcha i va j lar uchun

$$\Delta_{ij} \leq 0, \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

o'rinli bo'lsa, topilgan boshlang'ich bazis reja optimal reja bo'ladi.

3. Agar i va j larning kamida bir qiymati uchun $\Delta_{ij} > 0$ bo'lsa, boshlang'ich bazis reja almashtiriladi. Buning uchun

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{lk}$$

shartni qanoatlantiruvchi (l, k) katakcha to'ldiriladi (x_{lk} noma'lum bazisga kiritiladi). $x_{lk} = \theta$ deb faraz qilib (l, k) katakchaga θ kiritiladi. So'ngra soat strelkasi bo'yicha (l, k) katakchadan boshlab harakat qilib, to'ldirilgan katakchalarga tartib bilan $(-)$ va $(+)$ ishoralari qo'yilib boriladi. Natijada yopiq K kontur hosil bo'ladi

$$K = K^{-l} \cup K^{+},$$

bu erda K^{-l}, K^{+} $(-)$ va $(+)$ ishorali katakchalarni o'z ichiga oluvchi yarim konturlar.

Quyidagi formula orqali θ ning son qiymati topiladi.

$$\theta = \min_{x_{ij} \in K} x_{ij} = x_{pq} \quad (5.24)$$

$$x_{ij} \in K$$

4. Yangi bazis reja hisoblanadi:

$$\left. \begin{aligned} x'_{lk} &= \theta, \\ x'_{pq} &= 0, \\ x'_{ij} &= x_{ij}, \text{ agar } x_{ij} \notin K, \\ x'_{ij} &= x_{ij} + \theta, \text{ agar } x_{ij} \in K^{+}, \\ x'_{ij} &= x_{ij} - \theta, \text{ agar } x_{ij} \in K^{-}. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Yangi bazis rejadagi to'ldirilgan katakchalar soni $n+m-1$ ta bo'lganligi uchun (5.24) shartni qanoatlantiruvchi katakchalar birdan ortiq bo'lsa, ulardan bittasini bo'sh katakchaga aylantirib, qolgan katakchalardagi taqsimotni 0 ga teng deb qabul qilinadi. Topilgan yangi bazis reja uchun yana qaytadan potentsiallar sistemasi topiladi va yangi rejaning optimal reja bo'lishlik sharti tekshiriladi. Agar yangi bazis

reja optimal reja bo'lmasa, u holda yana qaytadan 3, 4 punktlarda qilingan ishlar takrorlanadi. Jarayon optimal yechim topilguncha, ya'ni barcha bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$$

shart bajarilguncha takrorlanadi.

Misol. Berilgan transport masalasini potentsiallar usuli bilan yeching.

1-jadval.

$a_i \backslash b_j$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 100- θ	7 8	4 9	1 11	4 5	0
250	2 100+ θ	7 150- θ	10 -5	6 -2	11 -12	-8
200	8 -8	5 50+ θ	3 100	2 50- θ	2 -3	-10
300	11 3	8 11	12 5	16 50	13 250	4
v_i	10	15	13	12	9	$\theta=50$

1. Boshlang'ich bazis rejani «shimoliy-g'arb burchak» usuli bilan topamiz.

2. Har bir to'ldirilgan katakcha uchun potentsial tenglama tuzib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 10, & u_3 + v_3 &= 3, \\ u_2 + v_1 &= 2, & u_3 + v_4 &= 2, \\ u_2 + v_2 &= 7, & u_4 + v_4 &= 16, \\ u_3 + v_2 &= 5, & u_4 + v_5 &= 15. \end{aligned}$$

Bu sistemadagi noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ko'p. Shuning uchun ixtiyoriy bir potentsialni (masalan, u_1 ni) 0 ga teng deb qabul qilib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

$$\begin{aligned} u &= (0, -8, -10, 4), \\ v &= (10, 15, 13, 12, 9). \end{aligned}$$

3. Har bir bo'sh katakcha uchun

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

ni hisoblab uni bo'sh katakchani pastki o'ng burchagiga yozamiz:

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{42} = 11$$

bo'lganligi sababli (1,4) katakchaga (yoki (4,2) katakchaga) θ son kiritamiz va (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4) katakchalarni o'z ichiga oluvchi yopiq K konturini tuzamiz.

$$K = K^- \cup K^+,$$

bu erda $(1,1), (2,2), (3,4) \in K^-$ va $(2,1), (3,2) \in K^+$.

4. θ ning son qiymatini topamiz.

$$\theta = \min_{x_{ij} \in K^-} x_{ij} = x_{34} = 50.$$

Yangi bazis rejani aniqlaymiz va ularni jadvalga joylashtiramiz.

2-jadval.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 50- θ	7 8	4 9	1 50+ θ	4 -6	0
250	2 150+ θ	7 100- θ	10 -10	6 -13	11 -21	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 -14	-10
300	11 14	8 22	12	16 50- θ	13 250	15
v_i	10	15	13	1	-2	$\theta=50$

Yuqoridagi usul bilan potentsiallar sistemasini tuzib va uni yechib $u=(0, -8, -10, 15)$, $v=(10, 15, 13, 1, -2)$ ekanini topamiz.

Barcha bo'sh kataklar uchun $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ ni hisoblab chiqamiz.

2-jadvaldan ko'rinadiki, $\max \Delta_{ij}=\Delta_{42}=22$.

Shuning uchun (4.2) katakcha θ ni kiritib, jadvalda ko'rsatilgan yopiq K konturni tuzamiz va $\theta = \min_{x_{ij} \in K} x_{ij} = x_{44} = 50$ ekanini aniqlaymiz.

So'ngra (5.23) formula orqali yangi bazis rejani topib jadvalga joylashtiramiz va yuqoridagi ishlarni takrorlaymiz.

3-jadval.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0- θ	7 8	4 9	1 100	4 θ 16	0
250	2 200+ θ	7 50- θ	10 -5	6 -13	11 1	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 θ 8	-10
300	11	8 50+ θ	12	16	13 250- θ	-7
v_i	10	15	13	1	20	$\theta=0$

4-jadval.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 -16	7 -8	4 -7	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 -5	6 3	11 1	8
200	8 -8	5 100- θ	3 100	2 5	2 θ 8	6
300	11 -8	8 50+ θ	12 -6	16 -6	13 250- θ	9
v_i	-6	-1	-3	1	4	$\theta=100$

5-jadval.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 -16	7 -8	4 1	1 100- θ	4 0+ θ	0
250	2 200	7 50- θ	10 3	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 100	2 -3	2 100	-2
300	11	8	12	16	13	9

			θ			
	-8	150+ θ	2	-6	150- θ	
v_i	-6	-1	5	1	4	$\theta=50$

6-jadval.

$b_i \backslash a_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 -13	7 -8	4 1	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -11	10 0	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -8	3 100- θ	2 -3	2 100+ θ	-2
300	11 -5	8 100	12 θ 2	16 -6	13 100- θ	9
v_i	-3	-1	5	1	4	$\theta=100$

7-jadval.

$b_i \backslash a_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 -13	7 -6	4 θ 1	1 50	4 50- θ	0
250	2 200	7 -1	10 0	6 50	11 -2	5
200	8 -11	5 -8	3 0- θ	2 -3	2 200+ θ	-2
300	11 -7	8 200	12 100	16 -8	13 -2	7
v_i	-3	1	5	1	4	$\theta=0$

8-jadval.

$B_i \backslash a_i$	200	200	100	100	250	u_i
100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -11	5 -7	3 -1	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	13 -1	8
v_i	-3	0	4	1	4	

8-jadvalda keltirilgan reja optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij}=(u_i+v_j-c_{ij})\leq 0.$$

Shunday qilib, sakkizinchi tsiklda quyidagi optimal yechimga ega bo'ldik:

$$\begin{aligned}x_{14}=50, & \quad x_{15}=50, \\x_{21}=200, & \quad x_{24}=50, \\x_{35}=200, & \quad x_{42}=200, \quad x_{43}=100, \\y_{\min}=50+4 \cdot 50+2 \cdot 200+6 \cdot 50+2 \cdot 200+8 \cdot 200+12 \cdot 100=4150.\end{aligned}$$

4-§. Xos transport masalasi va uni to'g'rilashning ε - usuli

Transport masalasining bazis rejasidagi musbat komponentlar soni $k < n+m-1$ bo'lsa, bu reja xos reja bo'ladi. Bunday rejani to'g'rilash uchun unga $n+m-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Kiritilgan nol elementlarga mos vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lishi kerak. Bunga erishish uchun quyidagi ε usulni qo'llanish mumkin.

ε usul. Shimoliy g'arb burchak usuli bilan boshlang'ich bazis rejasi topishni eslaymiz. Agar 1-qadamda

$$x_{21}=b_1-a_1=a_2$$

bo'lsa, x_{31} ham, x_{22} ham musbat son bo'la olmaydi. Har vaqt bunday vaziyat ro'y berganda bazis rejadagi bazis o'zgaruvchilar soni kamaya boradi. Bunday hol odatda, transport masalasidagi bir necha a_i ning yig'indisi (hammasi emas) bir necha b_j ning yig'indisiga teng bo'lganda bajarilishi mumkin. Ana shunday hol o'rinli bo'lgan transport masalasini xos transport masalasi deb aytamiz.

Xos holatining oldini olish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish, buning uchun esa a_i va b_j larning qiymatining biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, etarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\overline{b_j} = b_j, \quad (j = \overline{1, n})$$

$$\overline{b_n} = b_n + m\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

ε etarlicha kichik son bo'ganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

ε usulni quyidagi masalaga qo'llaymiz:

$b_i \backslash a_i$	1	3	3	2	5
3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

transport masalasi uchun «shimoliy-g'arb burchak» usuli bilan bazis reja tuzsak, u xos reja bo'ladi, mahsulot taqsimlangan kataklar soni 6 ta (masala xosmas bo'lishi uchun ular 7 ta bo'lishi kerak) ya'ni

$a_i \backslash b_i$	1	3	3	2	5
3	c_{11} 1	c_{12} 2	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22} 1	c_{23} 3	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} 2	c_{35} 5

ϵ usulni qo'llanilganda esa ushbu jadval hosil bo'ladi:

$a_i \backslash b_i$	1	3	3	2	$5+3\epsilon$
$3+\epsilon$	c_{11} 1	c_{12} $2+\epsilon$	c_{13} 0	c_{14}	c_{15}
$4+\epsilon$	c_{31}	c_{22} $1-\epsilon$	c_{23} 3	c_{24} 2ϵ	c_{25}
$7+\epsilon$	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} $2-2\epsilon$	c_{35} $5+3\epsilon$

Topilgan bazis rejada $x_{24}=2\epsilon>0$. ϵ usul 0 qiymatli ikki o'zgaruvchidan qaysi birini bazisga kiritish kerakligini ko'rsatib beradi. Agar ϵ usul qo'llanilmaganda edi x_{24} va x_{33} o'zgaruvchilardan qaysi birini bazisga kiritish kerakligini tanlash kerak bo'lardi. ϵ usul ana shunday tanlash muammosini hal qiladi.

5-§. Ochiq modeli transport masalasi

Ba'zi transport masalalarida ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig'indisi $\sum_i a_i$ ularga bo'lgan talablar yigindisi $\sum_j b_j$ dan kichik (katta) bo'lishi mumkin. Bunday masalalar ochiq modeli transport masalasi deyiladi.

Agar $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ bo'lsa, mahsulotga bo'lgan hamma talabni qanoatlantirib bo'lmaydi. Lekin bu holda ham mahsulotlarni kam xarajat sarf qilib taqsimlash rejasini aniqlash mumkin. Buning uchun masalaga mahsulot zahirasi

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i > 0$$

birlikni tashkil qiluvchi soxta $m+1$ ta'minotchi kiritiladi. Bu punktdan barcha iste'mol qiluvchi punktlarga mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari $c_{m+1,j}=0, j=\overline{1,n}$ deb qabul qilinadi.

Agar $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $n+1$ -soxta iste'mol qiluvchi punkt kiritilib, bu punktga mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari $c_{i,n+1}=0$, $i=1, \overline{m}$ deb qabul qilinadi. Bu punktning masulotga bo'lgan talabi $b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j > 0$ bo'ladi.

Misol. Quyidagi ochiq modeli transport masalasini yching.

$a_i \backslash b_j$	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Bu masalada $\sum_i a_i = 16 > \sum_j b_j = 13$. Shuning uchun talabi $b_6 = 16 - 13 = 3$

bo'lgan soxta iste'mol qiluvchi punkt kiritib, masalani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$a_i \backslash b_j$	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Bu masalani potentsial usuli bilan echib, 7-tsiklda optimal yechimni topamiz:

$a_i \backslash b_j$	3	3	3	2	2	3
4	3	2 1	1 3	2	3	0
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 2	3	4	5	0 2

ya'ni:

$$\begin{aligned}
 x_{12} &= 1, x_{13} = 3, \\
 x_{24} &= 2, x_{25} = 2, x_{26} = 1 \\
 x_{31} &= 3, x_{32} = 2, x_{36} = 2, \\
 Y_{min} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 13.
 \end{aligned}$$

Demak, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni eng kam harajat sarf qilib taqsimlash uchun 2-ta'minotchi punktga 1 birlik va 3- ta'minotchi punktga 2 birlik mahsulot ortib qolishi kerak ekan.

6-§. Differentsial rentalar usuli (Brudno usuli)

Rus olimi A.L.Lure 1959 yilda transport masalasini yechish uchun optimal yechimga shartli optimal yechimlar yordami bilan yaqinlashish usulini yaratdi. A.L.Brudno bu usulni modifikatsiyalab (o'zgartirib), uni **differentsial rentalar usuli** deb ataydi. Differentsial rentalar usuli va shartli optimal yechimlar bilan yaqinlashish usulining g'oyasi bir xil bo'lishiga qaramay, ular bir-biridan farq qiladi. Ular orasidagi asosiy farq shundan iboratki, differentsial rentalar usuli elektron hisoblash mashinasida qo'llanish uchun qulay bo'lib, shartli optimal rejalar yordami bilan yaqinlashish usuliga nisbatan ikki marta kam vaqt talab qiladi.

Ma'lumki, transport masalasini potentsiallar usuli bilan echishda eng avval ishlab chiqarilgan hamma mahsulot to'la taqsimlanadi, ya'ni bazis reja topiladi. So'ngra topilgan bazis reja optimal rejaga ketma-ket yaqinlashtirilib boriladi. Differentsial rentalar usulida esa dastlab mahsulotning bir qismi taqsimlandi, lekin taqsimlangan mahsulot optimal rejaning qismini tashkil qiladi. Yechish jarayoni mahsulot to'la taqsimlanguncha davom ettiriladi.

Differentsial rentalar usulining algoritmini ko'rishdan avval ba'zi qo'shimcha tushunchalar bilan tanishchamiz.

Faraz qilaylik, $X=(x_{ij})$ bazis yechimga shunday ikki o'lchovli $(n \times m)$ jadval mos kelsinki, unda har bir x_{ij} bazis o'zgaruvchi joylashgan katakchaga belgi (kvadratcha) qo'yilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar belgi o'zining ustunida (qatorida) yagona bo'lsa, u tartiblanuvchi deb ataladi. Berilgan jadvaldagi belgilarning har birini quyidagi algoritm yordamida tartiblash mumkin bo'lsa, bu belgilar sistemasi tartiblanuvchi deb ataladi.

Belgilarni tartiblash uchun transport jadvalining birinchi ustunidan boshlab tartib bilan barcha ustunlar qarab chiqiladi va belgilarga 1 nomerdan boshlab tartib nomerlar qo'yiladi. Qaralayotgan ustunda (qatorda) yagona nomerlanmagan belgi qatnashsa unga navbatdagi tartib nomeri qo'yiladi, aks holda bu ustundagi (qatordagi) belgilar vaqtincha nomerlanmay o'tkazib yuboriladi. Belgilar ustunlar bo'yicha nomerlanib bo'lmagan holda 1-qatordan boshlab nomerlanish tartibi davom ettiriladi. Shunday qilib, belgilarning hammasi nomerlanguncha ketma-ket ustun va qator bo'ylab belgilar qarab chiqiladi.

Lemma. Ikki o'lchovli $(n \times m)$ jadvaldagi belgilar sistemasi tartiblanuvchi bo'lishi uchun bu jadvalning ixtiyoriy $(n' \times m')$ qismidagi belgilar soni $n'+m'-1$ ta bo'lishi zarur va etarlidir.

Zarurligi. Faraz qilaylik, belgilar sistemasi tartiblanuvchi bo'lsin. U holda berilgan $(n \times m)$ jadvalning ixtiyoriy $(n' \times m')$ qismi kamida bitta nomerlanuvchi belgini o'z ichiga olishini isbot qilish mumkin. $(n' \times m')$ jadvalda bitta ham nomerlanuvchi belgi bo'lmasin deylik. U holda bu jadvalning har bir ustun va qatorida kamida ikitadan belgi joylashgan bo'ladi, ya'ni $(n' \times m')$ jadvaldagi belgilar sistemasi ham tartiblanuvchi bo'lmaydi. Demak, bunday ziddlikda $(n \times m)$ jadvaldagi belgilar sistemasi ham tartiblanuvchi bo'lmaydi, chunki tartiblanuvchi belgilar sistemasini o'z ichiga olgan jadvalning ixtiyoriy qismidagi belgilar sistemasi ham tartiblanuvchi bo'lishi kerak.

Etarliligi. Faraz qilaylik, $(n \times m)$ jadvalning ixtiyoriy $(n' \times m')$ qismi kamida bitta nomerlanuvchi belgini o'z ichiga olsin. Bu holda $(n' \times m')$ jadvaldagi hamma belgilarni va demak, $(n \times m)$ jadvaldagi belgilarni birin-ketin nomerlash mumkin bo'ladi.

Transport masalasini differentsial rentalar usuli bilan yechish uchun masalaning berilganlarini ushbu jadvalga joylashtiramiz

$a_i \backslash b_i$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

So'ngra quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

1. Har bir j , $(j = \overline{1, n})$ uchun

$$\min_i c_{ij} = c_{kj} \quad (5.24)$$

topiladi va (k, j) katakchani yuqori o'ng burchagiga belgi (kvadratcha) kiritiladi. Agarda j -ustunda (5.24) shartni qanoatlantiruvchi c_{ij} lar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ulardan faqat bittasiga mos keluvchi katakchaga belgi kiritiladi.

2. Yuqoridagi algoritm bo'yicha belgilar nomerlanadi.

3. Birinchi nomerli belgidan boshlab, tartib bilan har bir belgi joylashgan (k, l) katakchaga mahsulot taqsimlanadi

$$X_{kl} = \min(a_k, b_l)$$

Agar $b_l < a_k$ bo'lsa, $x_{kl} = b_l$ bo'ladi va a_k ning qiymati $a_k - b_l$ ga o'zgaradi. Agarda $a_k < b_l$ bo'lsa, $x_{kl} = a_k$ bo'lib, b_l ning qiymati $b_l - a_k$ ga o'zgaradi.

4. Har bir j -ustun uchun

$$b_j^t = \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(t)}, \quad (5.27)$$

ya'ni j -iste'mol qiluvchi punktga keltirilgan mahsulotlar yig'indisi topiladi, bu erda t -tsiklning nomeri.

5. Ustun xarakteristikasi $(y.x.)$ topiladi. Agar j -ustun uchun

$$b_j^t < b_j$$

bo'lsa, ya'ni j -punktning mahsulotga bo'lgan talabi qondirilmagan bo'lsa, u holda jadvaldagi ustun xarakteristikasi $(y.x.)$ ni ifodalovchi qatorda j -ustun uchun $(-)$ ishora qo'yiladi.

6. Qator xarakteristikasi (q.x) topiladi buning uchun belgilarni teskari tartibda bir marta qarab chiqib, minus ishorali ustundagi belgi joylashgan qatorga minus ishora qo'yiladi.

Agar belgi minus ishorali i -qatorda joylashgan bo'lib, bu belgi joylashgan (i,j) katakchadagi $x_{ij} > 0$ bo'lsa, j -ustunga ham minus ishora qo'yiladi. Hamma belgilarni bir marta qarab chiqqandan so'ng qolgan qator va ustunlarga plyus ishora qo'yiladi.

7. Har bir minus ishorali j -ustun uchun differentsial renta

$$\Delta_j = \min_i c_{ij}^+ - c_{ij}^0$$

topiladi, bu erda c_{ij}^+ - plyus ishorali qatordagi transport xarajatlarini va c_{ij}^0 - belgisi bor katakchadagi transport xarajatini ko'rsatadi.

8. $\min_i \Delta_j = \Delta_k$ shartni qanoatlantiruvchi k -ustundagi minimal xarajat joylashgan (l,k) katakchaga qo'shimcha belgi kiritiladi. So'ngra yangi tsiklga o'tiladi. Yangi tsiklga o'tish uchun yana jadval tuziladi. Yangi jadvalga a_i , b_j lar va musbat ishorali qatordagi c_{ij} lar oldingi jadvaldan o'zgarmsdan ko'chirildi. Minus ishorali qatordagi transport xarajatlari (c_{ij}) ga Δ_k qo'shiladi, ya'ni

$$(\bar{c}_{ij})' = \bar{c}_{ij} + \Delta_k.$$

Yangi jadvalga belgilar nomersiz ko'chiriladi. Agar birorta j -ustunda ikkita belgi joylashgan bo'lib ulardan biri musbat qatorda, ikkinchisi esa minus ishorali qatorda yotsa, minus ishorali belgi yangi jadvalga ko'chirilmaydi.

Yangi tsikl belgilarni nomerlashdan boshlanadi va yuqoridagi 2-8 punktlarda qilingan ishlar yana qaytadan takrorlanadi. Bunday takrorlanish masalaning optimal yechimi topilguncha, ya'ni barcha j lar uchun $b_j = b_j'$ tenglik bajarilguncha davom etadi. So'ngra masalaning optimal yechimi yoziladi.

Faraz qilaylik,

$$x_{11}^*, x_{21}^*, \dots, x_{mn}^*$$

masalaning optimal yechimi bo'lsin, u holda bu yechimdagi umumiy transport xarajatlari quyidagiga teng bo'ladi:

$$Y_{min} = c_{11}x_{11}^* + c_{21}x_{21}^* + \dots + c_{mn}x_{mn}^*$$

Misol. Differentsial rentalar usuli bilan quyidagi masalani yechamiz.

I.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	10	7	4	1 $\begin{array}{ c c } \hline 4 \\ \hline 100 \end{array}$	4	+
250	2 $\begin{array}{ c c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	7	10	6	11	+
200	8	5 $\begin{array}{ c c } \hline 2 \\ \hline 200 \end{array}$	3 $\begin{array}{ c c } \hline 3 \\ \hline 0 \end{array}$	2	2 $\begin{array}{ c c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	-
300	11	8	12	16	13	+
b^1_j	200	200	0	100	0	
U.X.	+	-	-	+	-	
Δ_j		2	<u>1</u>		2	$\Delta_{\min}=1$

II.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	10	7	4 $\begin{array}{ c c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	1 $\begin{array}{ c c } \hline 3 \\ \hline 100 \end{array}$	4	-
250	2 $\begin{array}{ c c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	7 3	10	6	11	+
200	9	6 $\begin{array}{ c c } \hline 2 \\ \hline 200 \end{array}$	4 $\begin{array}{ c c } \hline 6 \\ \hline 0 \end{array}$	3	3 $\begin{array}{ c c } \hline 4 \\ \hline 0 \end{array}$	-
300	11	8	12	16	13	+
b^2_j	200	200	0	100	0	
U.X.	+	-	-	-	-	
Δ_j		1	6	5	8	$\Delta_{\min}=1$

III.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	11	8	5 $\begin{array}{ c c } \hline 4 \\ \hline 0 \end{array}$	2 $\begin{array}{ c c } \hline 2 \\ \hline 100 \end{array}$	5	-
250	2 $\begin{array}{ c c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	7 $\begin{array}{ c c } \hline 5 \\ \hline 50 \end{array}$	10	6	11	-
200	10	7 $\begin{array}{ c c } \hline 6 \\ \hline 0 \end{array}$	5 $\begin{array}{ c c } \hline 7 \\ \hline 0 \end{array}$	4	4 $\begin{array}{ c c } \hline 3 \\ \hline 200 \end{array}$	-
300	11	8	12	16	13	+
b^3_j	200	50	0	100	200	
U.X.	-	-	-	-	-	
Δ_j	9	<u>1</u>	7	14	9	$\Delta_{\min}=1$

IV.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	12	9	6 $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 0 \end{array}$	3 $\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 100 \end{array}$	6	-
250	3 $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	8 $\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	11	7 $\begin{array}{ c } \hline \\ \hline \end{array}$	12	+
200	1	8	6 $\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline 0 \end{array}$	5 $\begin{array}{ c } \hline \\ \hline \end{array}$	5 $\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 200 \end{array}$	-
300	11	8 $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 200 \end{array}$	12	16	13	+
b_i^4	200	200	0	100	200	
U.X.	+	+	-	-	-	
Δ_j			5	<u>4</u>	7	$\Delta_{\min}=4$

V.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	16	13	10 $\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline 100 \end{array}$	7 $\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline 0 \end{array}$	10	-
250	3 $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	8 $\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	11	7 $\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline 50 \end{array}$	12	-
200	15	12	10 $\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 0 \end{array}$	9 $\begin{array}{ c } \hline \\ \hline \end{array}$	9 $\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 200 \end{array}$	-
300	11	8 $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 200 \end{array}$	12	16	13	+
b_i^5	200	200	100	50	200	
U.X.	-	+	-	-	-	
Δ_j	8		<u>2</u>	9	4	$\Delta_{\min}=2$

VI.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	18	15	12 $\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline 0 \end{array}$	9 $\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline 50 \end{array}$	12	+
250	5 $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	10	13	9 $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 50 \end{array}$	14	+
200	17	14	12 $\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	11	11 $\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 200 \end{array}$	-
300	11	8 $\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 200 \end{array}$	12 $\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline 100 \end{array}$	16	13	+
b_j^6	200	200	100	100	200	
U.X.	+	+	+	+	-	
Δ_j					1	$\Delta_{\min}=1$

VII.

$a_i \backslash b_i$	200	200	100	100	250	q.X.
100	18	15	12 $\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline 0 \end{array}$	9 $\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline 50 \end{array}$	12 $\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline 50 \end{array}$	
250	5 $\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 200 \end{array}$	10	13	9 $\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 50 \end{array}$	14	
200	18	15	13	12	12 $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 200 \end{array}$	
300	11	8 $\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 200 \end{array}$	12 $\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline 100 \end{array}$	16	13	
b_j^7	200	200	100	100	250	
U.X.						

Shunday qilib, VII tsiklda optimal yechim topildi. Masalaning javobini yozish uchun topilgan optimal rejani dastlabki jadvalga joylashtiramiz:

10	7	4	1	4
		0	50	50
2	7	10	6	11
200			50	
8	5	3	2	2
				200
11	8	12	16	13
	200	100		

Optimal reja

$$x_{14}=50, x_{15}=50, x_{15}=0$$

$$x_{21}=200, x_{24}=50,$$

$$x_{35}=200,$$

$$x_{42}=200, x_{43}=100,$$

$$Y_{min}=1 \cdot 50 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 50 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 8 \cdot 200 + 12 \cdot 100 = 4150$$

Tayanch so'z va iboralar

Transport masalasi, yopiq modeli transport masalasi, "band katakchalar", "bo'sh katakchalar", "shimoliy g'arb burchak" usuli, "minimal xarajatlar" usuli, xarajatlar matritsasi, potentsiallar, potentsial tenglama, yopiq kontur, xos transport masalasi, xos bazis yechim, tsikllanish, ε -usul, ochiq modeli transport masalasi, differentsial rentalar usuli, shartli optimal yechim, qator va ustun xarakteristikalar, tartiblanuvchi belgilar.

Nazorat savollari

1. Transport masalasining matematik modeli qanday va u qanday formalarda yoziladi?
2. Yopiq va ochiq modeli transport masalalariga izoh bering.
3. Transport masalasi yechimi mavjud bo'lishining zarur va etarlilik sharti nimadan iborat?
4. Transport masalasi shartlaridan tuzilgan matritsaning rangi nimaga teng?
5. Transport masalasi yechimidagi 0 dan farqli o'zgaruvchilar soni nechta?
6. Qaysi holda transport masalasining yechimi butun sonli bo'ladi?
7. "Shimoliy g'arb burchak" usulining g'oyasi qanday?
8. "Minimal xarajatlar" usulining g'oyasi qanday?
9. Potentsiallar nima va u qanday ma'noga ega?
10. Potentsial tenglama nima va u qanday yoziladi?
11. Transport masalasi bazisechiminining optimallik sharti nimadan iborat?
12. Brundo usuli qanday usul?
13. Xos transport masalasi qanday?
14. Xos bazis yechim deb qanday yechimga aytiladi?
15. Tsikllanish nima va u qanday hollarda ro'y berishi mumkin?
16. ε -usulning ma'nosi nimadan iborat?
17. Ochiq modeli transport masalasini qanday yo'l bilan yopiq modeli masalaga aylantirish mumkin?
18. Soxta ta'minotchining mahsulot zahirasi nimaga teng bo'ladi?
19. Soxta iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi qancha bo'ladi?

Masalalar

1. Berilgan masalalarning matematik modelini tuzing.

a) 3 ta A, V, S temir yo'l stantsiyalarida mos ravishda 80, 70 va 50 vagonlar zahirasi mavjud. Bu vagonlarni g'alla ortishga shaylangan 4 ta punktga yuborish kerak. Jumladan, 1-punktga 60 ta, 2-punktga 45 ta, 3-punktga 65 va 4-punktga 30 ta vagon kerak. Vagonlarni taqsimlash uchun sarf qilinadigan xarajatlar matritsasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 16 & 11 \\ 12 & 17 & 14 & 18 \\ 15 & 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Vagonlarni iste'molchilarga optimal taqsimlash rejasini tuzing.

b) To'rt xil ish maydonga uch xil turdagi uskunalarni optimal taqsimlash talab qilinadi. Uskunalar miqdori mos ravishda 45, 30, 50 birlikda bo'lib, ish maydonlarining ularga bo'lgan talablari 20, 40, 45, 20 birlikdan iborat. Har bir uskunaning tayin ish maydonidagi mehnat unumdorligi quyidagi matritsa bilan xarakterlanadi.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Berilgan transport masalalarining boshlang'ich bazis yechimini toping.

a)

b_i	150	150	100
a_i			
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

b)

b_i	120	80	50
a_i			
130	1	7	8
70	6	1	1
50	7	6	1

v)

$a_i \backslash b_i$	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	5	3	4

3. Berilgan transport masalalarini potentsiallar usuli bilan yeching.

a)

$a_i \backslash b_i$	250	250	250	250
400	7	5	8	11
300	10	6	5	3
300	2	7	3	4

b)

$a_i \backslash b_i$	80	70	150	150
120	5	7	6	3
130	3	5	4	7
150	7	6	3	2

4. Berilgan transport masalalarini differentsial rentalar usuli bilan yeching.

a)

$a_i \backslash b_i$	150	150	150	150
170	3	7	6	9
180	9	6	3	5
150	6	8	9	3

b)

$a_i \backslash b_i$	150	150	150	150
190	10	11	9	8
210	8	9	11	10
200	7	7	8	5

5. Ochiq modeli transport masalalarini yeching.

a)

$b_i \backslash a_i$	150	150	150
110	7	5	8
120	11	9	10
120	6	6	7

b)

$b_i \backslash a_i$	225	225	300
250	5	7	8
210	8	9	10
240	9	10	5

6. Xos transport masalalarini ε -usulni qo'llab yeching.

a)

$b_i \backslash a_i$	200	250	200	150
200	5	9	8	7
250	6	7	8	9
350	9	8	7	6

b)

$b_i \backslash a_i$	12	18	20	10
12	1	3	5	7
18	2	4	6	1
30	6	7	3	5

VI BOB. BUTUN SONLI DASTURLASH

O'zgaruvchilariga butun sonli bo'lishlik sharti qo'yilgan chiziqli dasturlash masalalari katta ahamiyatga egadir. Bunday masalalar butun sonli dasturlash masalalari deb ataladi. Butun sonli dasturlash masalalariga sayyoh xaqidagi masala, optimal jadval tuzish, ratsional bichish, transport vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash, bo'linmaydigan maxsulotlar ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalalari misol bo'la oladi. Bu masalalarning ba'zilari bilan tanishamiz.

1 - §. Iqtisodiy masalalar 1. Sayyoh xaqidagi masala

Faraz qilaylik, P_0 shaxarda yashovchi sayyoh n ta P_1, P_2, \dots, P_n shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt ichida P_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun savdogarning P_i shahardan P_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini t_{ij} , ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$) bilan hamda uning har bir P_i shahardan P_j shaharga borish variantining xarakteristikasini x_{ij} bilan belgilaymiz. Agar savdogar P_i shahardan P_j ga borsa, $x_{ij} = 1$, bormasa $x_{ij} = 0$ bo'ladi (Soddalik uchun P_i va P_j shaharlar faqat bir marshrut yordami bilan bog'langan deb faraz qilamiz). Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (6.2)$$

$$x_{ij} = 0, \text{ } \ddot{e}ku \text{ } x_{ij} = 1 \quad (6.3)$$

$$y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6.4)$$

2. Optimal joylashtirish masalasi

Faraz qilaylik, m ta A_1, A_2, \dots, A_m punktlarda bir xil mahsulotlar ishlab chiqaruvchi korxonalarni joylashtirish kerak bo'lsin. Har bir korxonaning ishlab chiqarish quvvatini bildiruvchi x_i ($i = \overline{1, m}$) butun sonli qiymatlarni qabul qiladi. Har bir A_i punktda mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan harajat ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog'liq bo'lib, u $f_i(x_i)$ funktsiya orqali ifodalanadi. Soddalik uchun bu funktsiyani chiziqli deb qabul qilamiz, ya'ni

$$f_i(x_i) = s_i x_i.$$

Bundan tashqari n ta punktda bu mahsulot iste'mol qilinadi. har bir iste'mol qiluvchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi ma'lum va ular b_1, b_2, \dots, b_n birliklarni tashkil qiladi deb faraz qilamiz. Har bir A_i ishlab chiqaruvchi punkt har bir B_j iste'mol qiluvchi punkt bilan bog'langan bo'lib yo'l harajatlari matritsasi $C = (c_{ij})$ dan iborat bo'lsin.

A_i punktdan B_j punktga yuboriladigan mahsulot miqdorini x_{ij} bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (6.5)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (6.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (6.7)$$

$$x_i - \text{butun son}, \quad (6.8)$$

$$y = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (6.9)$$

3. Taqsimot masalasi

Berilgan n ta ishni bajarish uchun m ta uskunlardan foydalanish mumkin. i -uskuhaning ($i = \overline{1, \dots, m}$) j -ishni ($j = \overline{1, \dots, n}$) bajarishdagi mehnat unumdorligini C_{ij} bilan belgilaymiz. Har bir uskunada faqat bitta ishni bajarish mumkinligini hamda har bir ish faqat bitta uskunada bajarilishini nazarga olgan holda maksimal mehnat unumdorligini ta'minlovchi uskunalarni ishlarga tahsimlash rejasini aniqlaymiz.

Masaladagi noma'lumlarni $x_{ij} (i = \overline{1, \dots, m}; j = \overline{1, \dots, n})$ bilan belgilaymiz. Bu erda x_{ij} – j -ishni i -uskunada bajarishni baholovchi son bo'lib, agar j -ish i -uskunada bajarilsa $x_{ij} = 1$, agar j -ish i -uskunada bajarilmasa $x_{ij} = 0$ bo'ladi.

Har bir uskunani faqat bitta ishni bajarishda qo'llanishi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.10)$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Har bir ishni faqat bitta uskunada bajarilishi

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (6.11)$$

tenglik orqali ifodalanadi. Bu erda

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } j\text{-ish } i\text{-uskuнаda bajarilsa,} \\ 0, & \text{agar } j\text{-ish } i\text{-uskuнаda bajarilmasa.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Shunday qilib, masala (6.10)-(6.12) shartlarni qanoatlantiruvchi hamda

$$Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad (6.13)$$

funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi x_{ij} noma'lumlarning qiymatini topishga keltirildi. Bu masala ham butun sonli dasturlash masalasi bo'ladi.

Misol. Sexda qo'shimcha uskuna o'rnatishga qaror qabul qilinib, uning uchun $19/3 \text{ m}^2$ maydon ajratildi. Bu uskunani sotib olish uchun tsex 10 ming so'm pul sarf qilishi mumkin. Tsex o'z imkoniyatidan kelib chiqib 2 turdagi uskuna sotib olishi mumkin. 1-turdagi uskunaning bahosi 1000 so'm, II-turdagisining bahosi esa, 3000 so'm turadi.

I va II tur uskunaning o'rnatilishi oqibatida har smenada tsex mos ravishda 2 va 4 birlik mahsulot ko'proq ishlab chiqaradi. I tur uskunani o'rnatish uchun 2 m^2 , II tur uskuna uchun esa 1 m^2 maydon kerak.

Qaysi uskunadan qanchadan sotib olinganda sexda ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulotlarning miqdori maksimal bo'ladi?

Yechish. Tsex I-tur uskunadan x_1 dona, II-tur uskunadan x_2 dona sotib olsin, deylik. U holda masalani shartlari quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$2x_1 + x_2 \leq 19/3,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 - \text{butun}.$$

Masalaning maqsadi ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulotlar miqdorini maksimal qilishdan iborat bo'lib, u quyidagi funktsiya ko'rinishida yoziladi.

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga ega bo'ldi.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \end{cases} \quad (6.14)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (6.15)$$

$$x_1, x_2 - \text{butun}, \quad (6.16)$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \quad (6.17)$$

2-§. Butun sonli dasturlash masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini

Butun sonli dasturlash masalasini umumiy holda quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (6.18)$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{бывает}, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (6.19)$$

$$Y = \sum_{j=1}^m c_j x_j \rightarrow \min$$

yoki vektor formada

$$AX = b, \quad (6.21)$$

$$X \geq 0 \quad \text{va butun} \quad (6.22)$$

$$(6.20)$$

$$u=CX \rightarrow \min$$

(6.23)

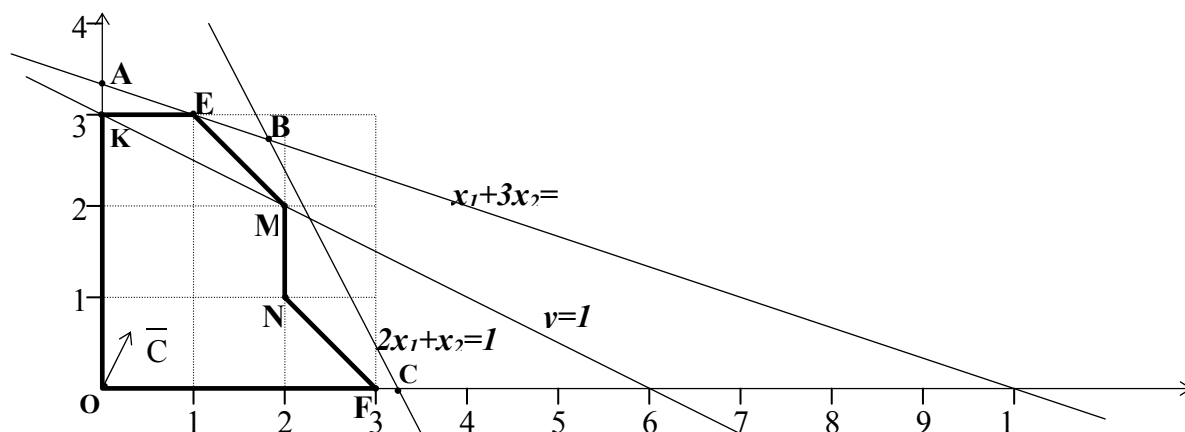
Butun sonli dasturlash masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar **to'la butun sonli dasturlash** masalalari deb ataladi.

Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilgan masalalar **qisman butun sonli** dasturlash masalalari deb ataladi.

Agar butun sonli dasturlash masalasidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala **Bul dasturlash masalasi** deb ataladi.

Butun sonli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz. Buning uchun 1-§ da keltirilgan (6.14). – (6.17) masalani grafik usulda yechish jarayonini tasvirlaymiz.

Eng avval masalaning (6.14) va (6.15) shartlarini qanoatlantiruvchi yechimlar to'plamidan iborat bo'lgan qavariq $OABC$ ko'pburchakni yasaymiz (6.1-shakl).



6.1-shakl.

$OABC$ ko'pburchakning nuqtalari ichida berilgan butun sonli dasturlash masalasining echimi bo'laoladigan nuqtani topish uchun bu ko'pburchakni $OKEMNF$ ko'pburchak bilan almashtiramiz. $OKEMNF$ ko'pburchak koordinatalari butun sonlardan iborat bo'lgan nuqtalarni o'z ichiga oladi va uning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo'ladi.

Endi (6.17) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani $OKEMNF$ ko'pburchakning burchak nuqtalari ichida qidiramiz. Bu ko'pburchakning nuqtalari ichida (6.17) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqta berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaydi. Bunday nuqtani topish uchun Y ga ixtiyoriy, masalan, 12 qiymat beramiz va

$$2x_1 + 4x_2 = 12$$

to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni $\bar{C}(2;4)$ vektor yo'nalishida $OKEMNF$ ko'pburchakning shu yo'nalishidagi chetki nuqtasi bilan kesishguncha siljitib boramiz. Ana shu burchak nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning yechimini aniqlaydi, maqsad funktsiyaning shu nuqtadagi qiymati esa maksimal bo'ladi.

Shakldan ko'rinadiki, bunday nuqta $E(1;3)$ dan iborat. Demak berilgan masalaning yechimi:

$$x_1=1, \quad x_2=3, \\ Y_{max}=14$$

bo'ladi.

Misol. Berilgan butun sonli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

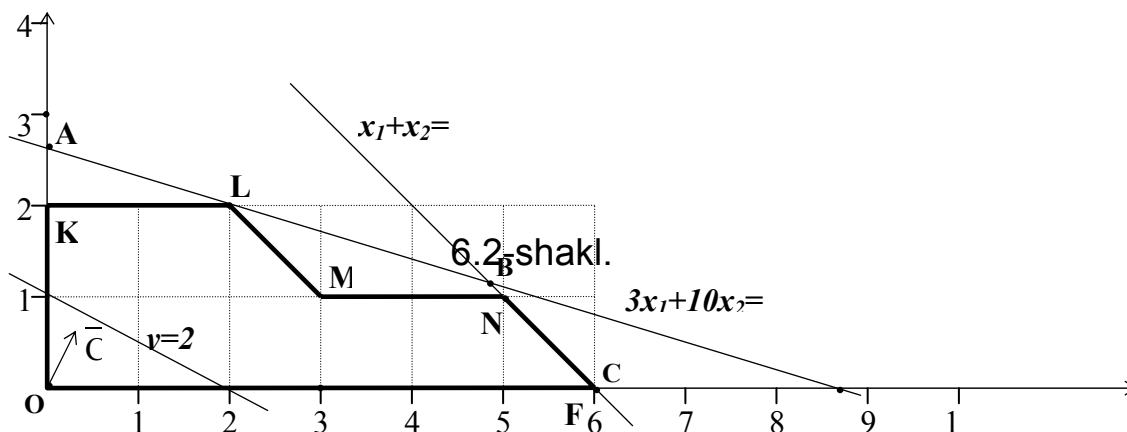
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 26, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (6.25)$$

$$x_1, x_2 \text{-butun}, \quad (6.26)$$

$$Y = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \quad (6.27)$$

Yechish. Masaladagi (6.24) tengsizliklar sistemasining (6.25) shartni qanoatlantiruvchi nomanfiy yechimlarini o'z ichiga oluvchi $OABC$ ko'pburchak yasaymiz (6.2-shakl).



$OABC$ ko'pburchakni $OKLMNF$ ko'pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'pburchak koordinatalari butun sonlardan iborat bo'lgan 16 ta nuqtani o'z ichiga oladi. Shu nuqtalar ichida (6.2) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani topish kerak. Buning uchun Y ga ixtiyoriy, masalan, 2 qiymat beramiz va

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni $\vec{C}(1;2)$ vektor yo'nalishida surib borib $N(5;1)$ nuqta shu yo'nalishdagi eng chetki nuqta ekanligini aniqlaymiz. Demak, bu nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning yechimini aniqlaydi:

$$x_1=5, \quad x_2=1, \\ Y_{max}=7.$$

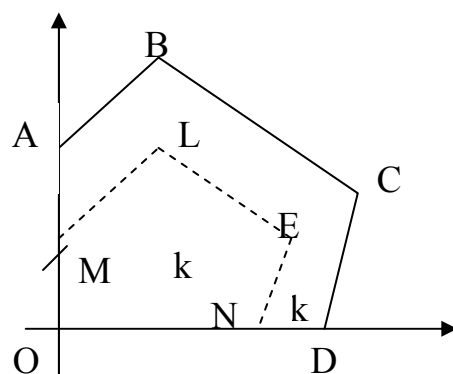
3 - §. Butun sonli dasturlash masalasini yechishning Gomori usuli

Butun sonli dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masala-sidan qo'shimcha (6.3) yoki (6.19) ko'rinishdagi shartlar bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli dasturlash masalasini yechish jarayonini qiyinlashtiradi. Natijada chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun qo'llaniladigan usullarni butun sonli dasturlash masalalariga qo'llash mumkin bo'lmay qoladi.

Butun sonli dasturlash masalalarni yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. R.Gomori to'liq butun sonli va qisman butun sonli dasturlash masalalarni yechish usulini yaratgan. Quyida uning faqat to'liq butun sonli dasturlash masalalarni yechish uchun mo'ljallangan 1-algoritmi bilan tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli dasturlash masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularning oddiy chiziqli dasturlash masalasi sifatida simpleks usulidan foydalanib yechamiz. Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli dasturlash masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks xolda noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga qo'shib yoziladi va bazis yechim almashtiriladi. Buning uchun noma'lumni kesuvchi tenglamadan ajratiladi va uning qiymatini boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab bu tenglama yordamida berilgan (6.18)–(6.20) masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamining kasr sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismini kesib boradi. Kesish jarayoni K to'plamining faqat butun sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismi K' topilguncha yoki bunday qism mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Buning geometrik tasvirini quyidagi shaklda (6.3-shakl) ifodalash mumkin.

Bu shaklda K qavariq to'plam OAVSD ko'pburchak orqali ifodalangan. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalari kesuvchi tenglamalar yordami bilan kesib borish natijasida OMLN qavariq ko'pburchak hosil bo'ladiki, uning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlarlar iborat bo'ladi.



6.3 shakl.

Kesuvchi tenglamalar quyidagicha tuziladi:

1. Faraz qilaylik, (6.18)-(6.20) masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan masala yechilgan va uning optimal yechimi $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m, \dots, x_n)$ bo'lsin. Oxirgi simpleks jadvaldagi bazis vektorlar $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m$ lardan iborat deylik. Bu xolda bu simpleks jadvalining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{1,m+1} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{2,m+1} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & x_{i,m+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & x_{m,m+1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Agar barcha x_i lar butun sonlar bo'lsa, topilgan yechim butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo'ladi.

2. Faraz qilaylik, ba'zi x_i lar kasr sonlardan iborat bo'lsin hamda ba'zi x_{ij} lar ham kasr sonlar bo'lsin (aks xolda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi). x_i va x_{ij} larning butun qismlarini mos ravishda $|x_i|$ va $|x_{ij}|$ bilan belgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr qismlari q_i, q_{ij} lar quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} q_i = x_i - |x_i|, \\ q_{ij} = x_{ij} - |x_{ij}|. \end{cases} \quad (6.28)$$

Faraz qilaylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo'lsin. U xolda \overline{X} matritsaning $\max_{q_i \neq 0} q_i = q_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi k qatori uchun kesuvchi tenglama tuziladi. Buning uchun avval

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k \quad (6.29)$$

tengsizlik tuziladi, so'ngra uni (-1) ga ko'paytirib x_{n+1} qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish natijasida quyidagi tenglama hosil qilinadi.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \quad (6.30)$$

Bunday tuzilgan tenglama **kesuvchi tenglama** deyiladi.

3. Kesuvchi tenglamani simpleks jadvalining $m+2$ qatoriga joylashtiramiz. Bu tenglamadagi x_{n+1} o'zgaruvchiga mos keluvchi P_{n+1} vektor bazis vektor bo'ladi.

Bazisdan P_{n+1} vektor chiqarilib, uning o'rniga

$$\min_{q_{kj} < 0} \left(\frac{\Delta_j}{q_{kj}} \right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektor kiritiladi va oddiy simpleks usuldagi formulalar yordamida simpleks jadval almashtiriladi. Agar hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi barcha x_i lar butun sonli (ya'ni xamma $q_i = 0$) bo'lsa, topilgan yechim berilgan butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo'ladi. Aks xolda yuqoridagi 2-3 punktlarda qilingan ishlarni yana takrorlaymiz, umuman bu ishlar berilgan masalalarning butun sonli yechimi topilguncha yoki masalalarning butun sonli yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Agar $\max q_i = q_k \quad q_i \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi k - qatordagi barcha x_{ij} lar butun sonli (demak barcha $q_{kj} = 0$) bo'lsa, u holda berilgan masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. quyidagi chiziqli dasturlash masalasini butun sonli yechimini toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun,}$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

Yechish. Masalaning normal holga keltiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun,}$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

Bu masalani noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan simpleks usul yordami bilan yechamiz.

Buning uchun x_3 va x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_3 va P_4 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, simpleks jadvalni to'ldiramiz va simpleks jarayonni amalga oshiramiz.

I.

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
P ₃	0	6	2	3	1	0
P ₄	0	3	2	-3	0	1
		8+0	3	1	0	0

II.

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
P ₃	0	3	0	<u>6</u>	1	-1
P ₁	-3	<u>3/2</u>	1	-3/2	0	1/2
		<u>7/2</u>	0	<u>11/2</u>	0	-3/2

III.

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
P ₂	-1	<u>1/2</u>	0	1	<u>1/6</u>	-1/6
P ₁	-3	<u>9/4</u>	1	0	<u>1/4</u>	1/4
		<u>3/4</u>	0	0	11/12	-7/12

Shunday qilib 3 – bosqichda masalaning optimal yechimi topildi, lekin bu yechim butun sonli emas. Yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun oxirgi simpleks jadvalning birinchi qatoriga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz. Buning uchun, eng avval, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Bu tengsizlikni ikki tomonini (-1) ga ko'paytirib, x_5 qo'shimcha o'zgaruvchi kiritamiz va quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Uni simpleks jadvalning 4- qatoriga joylashtiramiz.

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
P ₂	-1	<u>1/2</u>	0	1	<u>1/6</u>	-1/6	0
P ₁	-3	<u>9/4</u>	1	0	<u>1/4</u>	<u>1/4</u>	0
Δ _j		<u>3/4</u>	0	0	-11/12	-7/12	0
P ₅	0	-1/2	0	0	-1/6	<u>1/6</u>	1

Bazisdan P₅ ni chiqarib, uning o'rniga P₃ ni kiritamiz. natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi:

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₆
P ₂	-1	0	0	1	0	0	0
P ₁	3	<u>3/2</u>	1	0	0	<u>1/2</u>	0
P ₃	0	3	0	0	<u>1</u>	<u>-1</u>	0
Δ _j		<u>7/2</u>	0	0	0	-3/2	
P ₆	0	-1/2	0	0	0	-1/2	1

Endi simpleks jadvalning 2 qatoriga nisbatan kesuvchi tenglamani tuzamiz. Buning uchun avval quyidagi tengsizlikni tuzib olamiz:

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Bu tengsizlikning ikki tomonini (-1) ko'paytirib topamiz:

$$-\frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{1}{2}.$$

Tengsizlikning kichik tomoniga x_6 qo'shimcha o'zgaruvchi kiritamiz va quyidagi kesuvchi tenglamani tuzamiz:

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvalning 5-qatoriga joylashtiramiz. So'ngra bazisdan P₆ ni chiqarib, uning o'rniga P₄ ni kiritamiz.

B.v.	C	P ₀	-3	-1	0	0	0
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₆
P ₂	-1	0	0	1	0	0	0
P ₁	-3	1	1	0	0	0	1
P ₃	0	4	0	0	1	0	1
P ₄	0	1	0	0	0	1	-2
Δ _j		8- 3=5	0	0	0	0	-3

Hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi P₀ vektorning koordinatalari butun sonlardan iborat. Demak, butun sonli dasturlash masalasining yechimi topilgan va u $X=(1;0;4;1)$ bo'lib, bu yechimdagi maqsad funktsiyaning qiymati $Y_{\min}=5$ bo'ladi.

Tayanch soʻz va iboralar

Butun sonli dasturlash; toʻla butun sonli dasturlash; qisman butun sonli dasturlash; Bul oʻzgaruvchili dasturlash; kesuvchi tenglama; Gomori usuli

Nazorat savollari

1. Butun sonli dasturlash masalasi qanday qoʻyiladi?
2. Butun sonli dasturlash masalalarining qanday turlari mavjud?
3. Butun sonli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
4. Qanday iqtisodiy masalalarning matematik modellari butun sonli dasturlash masalasiga misol boʻla oladi?
5. Sayyoh xaqidagi masalaning matematik modelini yozing.
6. Sanoat korxonalarini optimal joylashtirish masalasining matematik modeli qanday?
7. Taqsimot masalasining matematik modelini yozing.
8. R.Gomori usulining gʻoyasi qanday?
9. Kesuvchi tenglama nima va u qanday tuziladi?
10. Masalaning butun sonli yechimga ega boʻlmaslik sharti qanday?
11. Butun sonli yechimning optimallik sharti qanday?

Masalalar

I. Berilgan iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzing.

1 – masala. Tikuv fabrikasida 4 xil kiyim tayyorlash uchun 3 xil gazmol ishlatiladi. Har bir kiyimning bittasini tayyorlash uchun zarur bo'lgan gazmolning miqdori, kiyimning bahosi hamda fabrikadagi gazmollar zaxirasi xaqida ma'lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Gazmol artikuli	1 ta kiyim uchun sarf qilinadigan gazmol miqdori				Fabrikadagi gazmol zahirasi (m)
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Kiyimlar bahosi (ming so'm)	9	6	4	7	

Qaysi kiyimdan qanchadan tayyorlanganda sarf qilingan gazmollarning miqdori ularning zahirasidan oshmaydi ham korxonaning ishlab chiqargan kiyimlarining umumiy pul qiymati maksimal bo'ladi?

2 – masala. Uzunligi 110 sm. bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni mumkin bo'lgan kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xomaki mahsulot uzunliklari	Kesish variantlari					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Chiqindilar miqdori	20	30	15	5	25	10

Qancha po'lat xipchinlarni qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar talabdagidan kam bo'lmaydi va chiqindilarning miqdori minimal bo'ladi?

II. Berilgan butun sonli dasturlash masalalarini grafik usulda yeching.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun },$$

$$y = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun },$$

$$y = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 11, \\ 4x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun },$$

$$y = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$4) \begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \leq 44, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 30, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun },$$

$$y = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

III. Berilgan butun sonli dasturlash masalalarini R.Gomori usuli bilan yeching.

$$1) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 11, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}), \text{ butun }, \end{cases}$$

$$y = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 14, \\ 8x_1 + 11x_2 + 9x_3 \geq 12, \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}), \text{ butun }, \end{cases}$$

$$y = -10x_1 - 14x_2 - 21x_3 \rightarrow \max$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}), \text{ butun }, \end{cases}$$

$$y = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 16, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 0. \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}), \text{ butun,} \\
 & y = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

VII BOB. CHIZIQSIZ DASTURLASH MASALALARI

1-§. Chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishi va turlari

Ma'lumki, matematik dasturlash masalasi deganda umumiy holda

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i = \overline{1, m}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi va $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyani maksimumga (minimumga) aylantiruvchi x_1, x_2, \dots, x_n noma'lumlarning qiymatlarini topish masalasi nazarda tutiladi. Bu masala shartlarini qisqacha bunday yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i = \overline{1, m}, \quad (7.1)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min), \quad (7.2)$$

bu erda $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berilgan funktsiyalar, b_i ($i = \overline{1, m}$) lar o'zgarmas sonlar. (7.1) cheklamalar masalaning **chegaraviy shartlari**, $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiya esa **maqsad funktsiyasi** deb ataladi. (7.1) dagi har bir cheklama uchun $\leq, =, \geq$ belgilardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

Ayrim chiziqsiz dasturlash masalalarida x_1, x_2, \dots, x_n o'zgaruvchilarning ba'zilariga yoki hammasiga manfiy bo'lmaslik sharti qo'yilgan bo'ladi. Ba'zi masalalarda esa noma'lumlarning bir qismi (yoki hammasi) butun bo'lishligi talab qilinadi.

(7.1), (7.2) masaladagi hamma $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar chiziqli bo'lsa hamda barcha o'zgaruvchilarning nomanfiy bo'shligi talab qilinsa, bu masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi.

(7.1), (7.2) masalada $m=0$ bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u **shartsiz optimallashtirish masalasi** deyiladi. Bu holda masala quyidagicha yoziladi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n, \quad (7.3)$$

bu erda (x_1, x_2, \dots, x_n) -n o'lchovli vektor (nuqta) E_n – n o'lchovli Evklid fazosi, ya'ni vektorlarni qo'shish, songa ko'paytirish va ikki vektorning skalyar ko'paytmasi amallari kiritilgan n o'lchovli

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorlar (nuqtalar) to'plami.

Faraz qilaylik, (7.1) sistema faqat tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiy bo'lishlik sharti qo'yilmasin hamda $m < n$ bo'lib, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. Bu holda chiziqsiz dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \\ Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max(\min). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Bunday masala cheklamalari tenglamalardan iborat bo'lgan **shartli maksimum (minimum) masalasi** deyiladi. (7.4) ko'rinishdagi masalalarni differentsial hisobga asoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani uchun ularni **optimallashtirishning klassik masalalari** deyiladi.

Agar (7.1) sistemadagi hamma cheklamalarlar tengsizliklardan iborat bo'lsa hamda ularning ba'zilariga « \leq », ba'zilariga esa « \geq », belgilar mos kelsa, bu tengsizliklarni osonlik bilan bir xil ko'rinishga keltirish mumkin. Bundan tashqari

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max$$

shartni

$$-f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

ko'rinishida yozish mumkin. Shuning uchun, umumiylikni buzmasdan, shartlari tengsizlikdan iborat bo'lgan chiziqsiz dasturlash masalasini quyidagicha yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7.6)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min. \quad (7.7)$$

Noma'lumlarning nomanfiylik sharti qatnashmagan masalalarga bunday shartni osonlik bilan kiritish mumkin.

Ba'zi hollarda masalaning (7.1) shartidagi ayrim cheklamalar tenglamalardan, ayrimlari esa tengsizliklardan iborat bo'lishi mumkin. Bunday masalalarni shartlari aralash belgili bo'lgan minimum masalasi ko'rinishiga keltirib, zish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m_1}) \quad (7.8)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}) \quad (7.9)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min. \quad (7.10)$$

Bunda (7.8), (7.9) cheklamalar chegaraviy shartlardan iborat bo'lib, noma'lumlarning nomanfiy bo'lishlik shartini ham o'z ichiga oladi.

Endi quyidagi ko'rinishda berilgan masalani ko'ramiz:

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (7.11)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset E_n, \quad (7.12)$$

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min). \quad (7.13)$$

Bu masala chekli o'lchovli chiziqsiz dasturlash masalasining umumiy ko'rinishidan iborat bo'lib, bunda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - maqsad funktsiyasi, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - chegaraviy funktsional, G - masalaning aniqlanish sohasi, G to'plamning nuqtalari

masalaning rejaları deb, (7.11) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami esa masalaning **joiz rejalar to'plami** deb ataladi.

Chiziqsiz dasturlashda **mahalliy** va **global** optimal reja tushunchasi mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilaylik, X^* nuqta (7.11) - (7.13) masalaning joiz rejasi va uning kichik ε atrofida (ε ixtiyoriy kichik musbat son) nuqtalar to'plami $\varepsilon(X^*) \in G$ dan iborat bo'lsin.

Agar

$$f(X^*) \leq f(X) \quad [f(X^*) \geq F(X)] \quad (7.14)$$

munosabat ixtiyoriy $X \in \varepsilon(X^*)$ uchun o'rinli bo'lsa, X^* reja maqsad funktsiyaga mahalliy minimum (maksimum) qiymat beruvchi mahalliy optimal reja deb ataladi.

1. Agar

$$f(X^*) \leq f(X) \quad [f(X^*) \geq F(X)]$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o'rinli bo'lsa, X^* reja maqsad funktsiyaga global (absolyut) minimum (maksimum) qiymat beruvchi **global optimal reja** yoki **global optimal yechim** deb ataladi.

Yuqoridagi (7.5)-(7.7) va (7.10) masalalarni yechish uchun chiziqli dasturlashdagi simpleks usulga o'xshagan universal usul kashf qilinmagan.

Bu masalalar $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar ixtiyoriy chiziqsiz funktsiyalar bo'lgan hollarda juda kam o'rganilgan. Hozirgacha eng yaxshi o'rganilgan chiziqsiz dasturlash masalalari $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar qavariq (botiq) bo'lgan masalalardir. Bunday masalalar **qavariq dasturlash masalasi** deyiladi. Qavariq dasturlash masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday mahalliy optimal echimi global echimdan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarda $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar chiziqli bo'lib, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maqsad funktsiyasi kvadratik formada ya'ni

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday masalalar **kvadratik dasturlash masalalari** deb ataladi. Chegaraviy funktsiya yoki maqsad funktsiyasi, yoki ularning har ikkisi ham n ta funktsiyalarning yig'indisidan iborat, ya'ni

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_{i1}(x_1) + g_{i2}(x_2) + \dots + g_{in}(x_n) \quad (7.15)$$

va

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad (7.16)$$

ko'rinishda bo'lgan masalalar **seperabel dasturlash masalalari** deb ataladi. Kvadratik va seperabel dasturlash masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslangan taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz dasturlash masalasini, jumladan, kvadratik dasturlash masalasini taqribiy yechish usullaridan biri gradient usulidir. Gradient usulini har qanday chiziqsiz dasturlash masalasini yechishga qo'llash mumkin. Lekin bu usul masalaning mahalliy optimal yechimlarini topishini nazarga olib uni qavariq (botiq) dasturlash masalalarini yechishga qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Chiziqsiz dasturlashga oid ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishdagi muqim masalalardan biri **stoxastik dasturlashdir**.

Bu masaladagi ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo'ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to'liq ma'lumot bo'lmagan optimallashtirish masalalarini stoxastik masalalar deb ataladi. Stoxastik masalalarni yechish uchun maxsus stoxastik dasturlashda aktiv va passiv usullar mavjud bo'lib, ularning 1-si masala noaniqlik va riskka (tavakkalchilikka) asoslanganda, 2-si esa masaladagi parametrlar tasodifiy miqdor bo'lganda optimal yechimni topish usulidir.

Yuqorida qayd etilgan har qanday chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalalarini hamda barcha parametrlari vaqtga bog'liq ravishda o'zgarmaydigan masalalar **statik masalalar** deb ataladi. Bunday masalalar rejalashtirilayotgan davr davomida ishlab chiqarish ham, iste'mol ham, resurslar ham o'zgarmas deb qaraladigan iqtisodiy masalaning matematik modellaridan iborat bo'ladi.

Parametrlari o'zgaruvchan miqdor bo'lib, ular vaqtning funktsiyasi deb qaralgan masalalar **dinamik dasturlash masalalari** deyiladi. Bunday masalalarni yechish usullarini o'z ichiga olgan matematik dasturlashning tarmoqi **dinamik dasturlash** deb ataladi. Dinamik dasturlash usullarini faqat dinamik dasturlash masalalarini yechishda emas, balki ixtiyoriy chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishda ham qo'llash mumkin.

2 - §. Chiziqsiz dasturlash masalalarining geometrik talqini. Grafik usul

Chiziqli dasturlash masalalarining xossalardan bizga ma'lumki, birinchidan, uning joiz rejaları to'plami, ya'ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma'lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi. Ikkinchidan, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maqsad funktsiyasini berilgan qiymatga erishtiradigan $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtalar to'plami n-o'lchovli fazoning gipertekisligini tashkil qiladi. Bundan tashqari, maqsad funktsiyaning turli qiymatlariga mos keluvchi gipertekisliklar o'zaro parallel bo'ladi. Uchinchidan, maqsad funktsiyaning mumkin bo'lgan rejaları to'plamidagi mahalliy minimumi (maksimumi) global (absolyut) minimumdan (maksimumdan) iborat bo'ladi. To'rtinchidan, agar maqsad funktsiya chekli optimal qiymatga ega bo'lsa, joiz rejalar to'plamini ifodalovchi qavariq ko'pburchakning kamida bir uchi optimal yechimni beradi. Mumkin bo'lgan rejalar ko'pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) bazis yechimni ifodalaydi. Bazis yechimdagi hamma noma'lumlar qat'iy musbat bo'lgan

holdagi yechim **xosmas bazis yechim** va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, **xos bazis yechim** deyiladi.

Ixtiyoriy bazis yechimdan boshlab boshqa bazis yechimga o'tib borib, chekli sondagi qadamdan so'ng funktsiyaga ekstremum qiymat beruvchi bazis yechim topiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo'lishi uchun maqsad funktsiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimdagi qiymatlaridan kam (ko'p) bo'lmasligi kerak.

Chiziqsiz dasturlash masalalarida esa yuqoridagi chiziqli dasturlashga doir xossalarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi.

Masalan, chiziqsiz dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmasligi ham mumkin. Buni chegaraviy shartlari

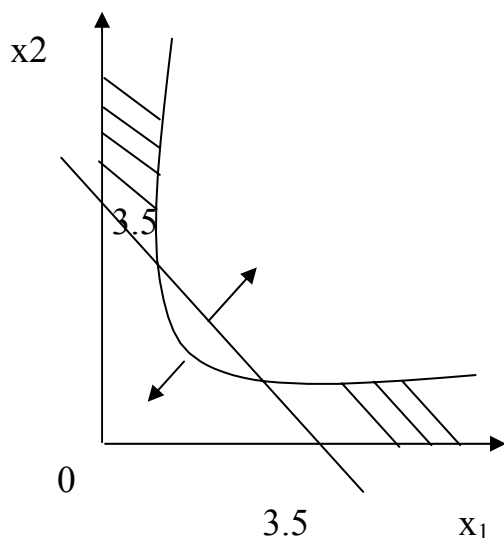
$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 3,5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

munosabatlardan iborat bo'lgan masalada ko'rish mumkin. Masalaning rejalar to'plami ikkita alohida qismlarga ajratilgan bo'lib, ularning birortasi ham qavariq emas (7.1 – shakl).

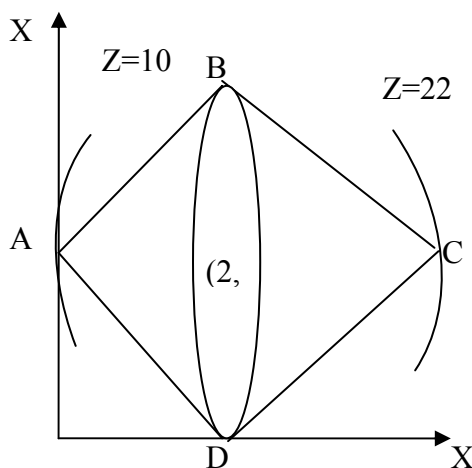
Agar joiz rejalar to'plami qavariq bo'lmasa, maqsad funktsiya chiziqli bo'lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi mahalliy yechimlari mavjud bo'ladi. Masalan, chegaraviy shartlari chiziqli va maqsad funktsiyasi chiziqsiz bo'lgan quyidagi masalani ko'ramiz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1 - x_2 &\geq -2, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1 - 3x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max.$$



7.1-shakl



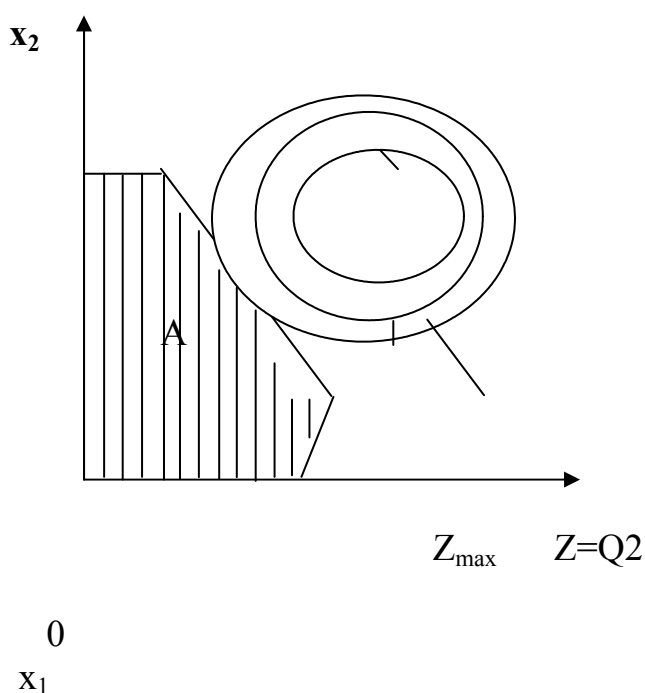
7.2 – shakl

Bu masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plami qavariq ABCD to'rtburchakdan iborat bo'ladi (7.2- shakl). Masaladagi maqsad funktsiya markazi (2,2) nuqtadan iborat bo'lgan elipslar oilasidan iborat.

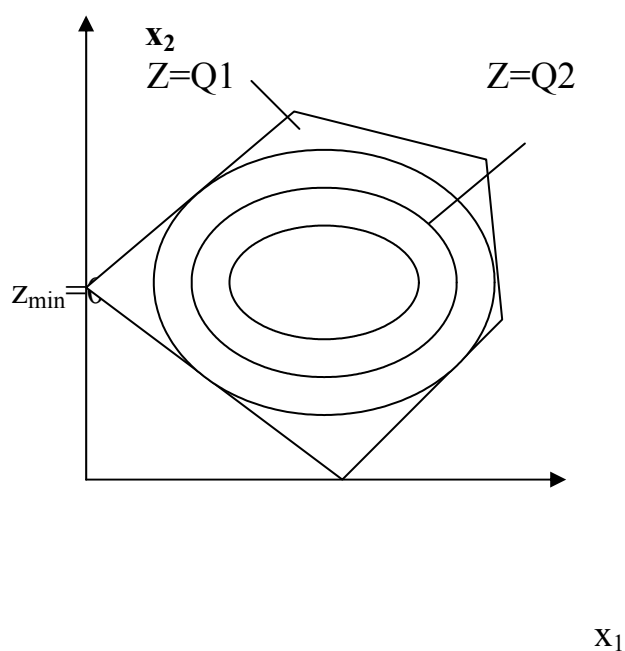
$Z=4$ da ellips B va D nuqtalardan o'tadi, A nuqtada $Z=100$ va C nuqtada $Z=226$ bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, A nuqtada maqsad funktsiyaning qiymati unga yaqin bo'lgan B va D nuqtalardagi qiymatidan kichik. Demak, A nuqtada maqsad funktsiya mahalliy minimumga erishadi. C nuqtada $Z = f(x_1, x_2)$ funktsiya eng katta $Z=226$ qiymatga erishadi. Maqsad funktsiyaning C nuqtadagi qiymati ABCD to'rtburchakka tegishli hamma nuqtalardagi qiymatidan katta bo'ladi. Demak, $Z = f(x_1, x_2)$ funktsiya C nuqtada global maksimumga erishadi.

Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to'plami C uchining koordinatalaridan iborat bo'ldi. Lekin umumiy holda, chiziqsiz dasturlash masalasining maqsad funktsiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta joiz rejalar to'plamining burchak nuqtasi bo'lishi shart emas. Ayrim hollarda optimal reja joiz rejalar to'plamining ichki nuqtasidan ham, chegaraviy nuqtasidan ham iborat bo'lishi mumkin. Masalan, 7.3-shaklda tasvirlangan masaladagi $Z = f(x_1, x_2)$ maqsad funktsiya minimum qiymatga mumkin bo'lgan rejalar to'plamining chegaraviy nuqtasida erishadi.

Umumiy holda (7.8)-(7.10) ko'rinishda berilgan chiziqsiz dasturlash masalasini ko'ramiz va bu masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz.



7.3-shakl



7.4-shakl

Masaladagi (7.8), (7.9) cheklamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami Evklid fazosida joiz rejalar to'plamini beradi. Bu to'plamning nuqtalari orasidan maqsad funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to'plamining eng past saviyali $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q$ gipersirti bilan kesishgan nuqtasini topish kerak. Bu nuqta berilgan (7.8) - (7.10) masalaning optimal yechimini beradi.

(7.8)-(7.10) masalaning optimal yechimini geometrik talqinidan foydalanib topish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Masalaning (7.8), (7.9) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini, ya'ni joiz rejalar to'plamini yasash kerak (agar bu to'plam bo'sh bo'lsa, masala yechimga ega bo'lmaydi).
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q$ gipersirtini yasash kerak.
3. Q ning qiymatini o'zgartirib borib, eng past saviyali gipersirt topiladi yoki uning quyidan chegaralanmaganligi aniqlanadi.

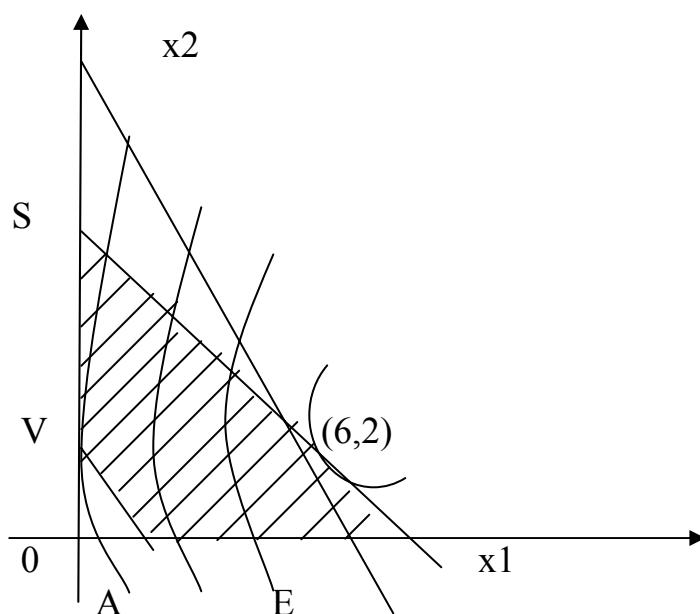
4. Mumkin bo'lgan rejalar to'plamining eng past saviyali gipersirt bilan kesishgan nuqtasi aniqlanadi va maqsad funktsiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi.

Quyidagi masalalarni geometrik talqinidan foydalanib yechamiz:

1-misol.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 15, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max(\min).$$



7.5-shakl

Masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ABCDE beshburchakdan iborat bo'ladi (7.5 - shakl). Agar $Z=Q$ ($Q>0$) deb qabul qilsak, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = Q$ tenglama markazi $M(6, 2)$ nuqtada va radiusi \sqrt{Q} ga teng bo'lgan aylanani ifoda etadi.

Q ning qiymatini orttirib yoki kamaytirib borish natijasida Z ning qiymati ham ortib yoki kamayib boradi. M nuqtadan turli radiusli aylanalar (parallel gipersirtlar) o'tkazib borib, Z funktsiyaga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi nuqtani topish mumkin.

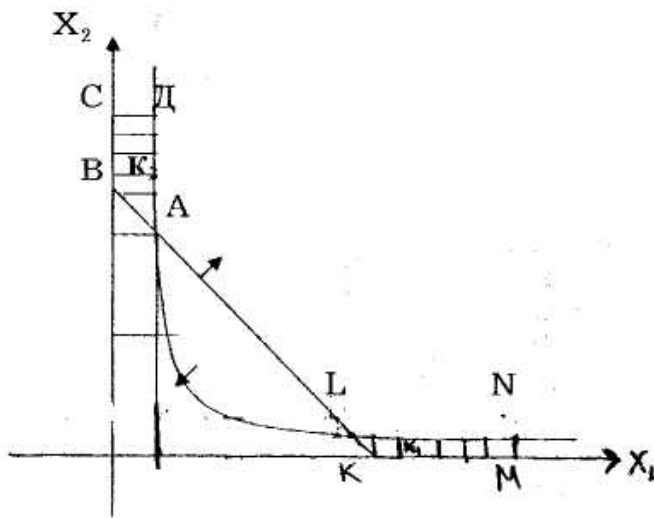
2 – misol.

$$\begin{aligned}
& x_1 \cdot x_2 \leq 4, \\
& x_1 + x_2 \geq 5, \\
& x_1 \leq 7, \\
& x_2 \leq 6, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max(\min).
\end{aligned}$$

Bu masalaning mumkin bo'lgan rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim K_1 va K_2 qismlardan iborat bo'ladi (7.6 - shakl). Maqsad funktsiya o'zining minimal qiymati $Z=17$ ga $A(1,4)$ va $L(4,1)$ nuqtalarda erishadi.

$D(\frac{2}{3};6)$ va $N(7;\frac{4}{7})$ nuqtalarda esa funktsiya mahalliy maksimum qiymatlarga erishadi:

$$Z(D) = \frac{328}{9}, Z(N) = \frac{2417}{49}.$$



7.6-shakl

Mahalliy maksimum qiymatlarni solishtirish Z funktsiyaning N nuqtada global maksimumga erishishini ko'rsatadi. D va N nuqtaning kordinatalari va ulardagi Z funktsiyaning qiymati quyidagicha topiladi:

$D(x_1^*, x_2^*)$ nuqta $x_2=6$ to'g'ri chiziqda va $x_2=4/x_1$ egri chiziqda yotgani uchun uning kordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \frac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases}$$

$$Z^* = x_1^{*2} + x_2^{*2} \quad Z^* = Z(D) = \frac{328}{9}.$$

Xuddi shuningdek, N nuqta $x_1=7$ to'qri chiziq va $x_2=4/x_1$ egri chiziqning kesishgan nuqtasi bo'lgani uchun uning x_1^0, x_2^0 koordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantirish kerak, ya'ni

$$\begin{cases} x_1^0 = 7, & x_1^0 = 7, \\ x_2^0 = \frac{4}{x_1^0}, & x_2^0 = \frac{4}{7}, \\ Z^0 = x_1^{0^2} + x_2^{0^2} & Z^0 = \frac{2417}{49}. \end{cases}$$

3-misol. $x_1 + x_2 \leq 6,$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

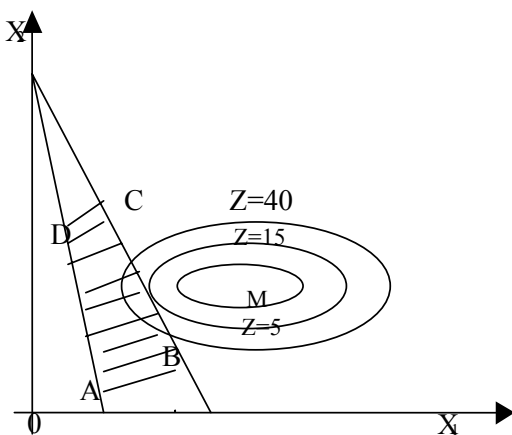
$$2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$0,5x_1 - x_2 \geq -4,$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 0,$$

$$Z = 100(x_1 - 3,5)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min.$$

Masalaning rejalaridan tashkil topgan to'plam ABCD to'rtburchakdan iborat (7.7-shakl).



7.7- shakl.

Z ga ixtiyoriy Q ($Q \geq 0$) qiymat beramiz. Natijada $10(x_1 - 3,5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 = Q$ tenglama markazi $M(3,5;4)$ nuqtada bo'lgan ellipsni ifodalaydi. Q ning qiymatini o'zgartirib borib, ellipsni o'ziga paralel ravishda siljitib borish mumkin. Natijada 7.7-shakldan ko'rish mumkinki, ellipsning qavariq to'plam ABCD ga uringan $E(x_1^*, x_2^*)$ nuqtasi optimal nuqta bo'ladi. Bu nuqtadagi Z funktsiyaning qiymatini Z^* bilan belgilaymiz. x_1^*, x_2^*, Z^* noma'lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{aligned} x_1^* + x_2^* &= 6, \\ Z^* &= 10(x_1^* - 3,5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2. \end{aligned}$$

Bundan tashqari $10(x_1^* - 3,5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2$ ellipsning (x_1^*, x_2^*) nuqtadagi urinmasi oqish burchagining tangensi esa -1 ga teng, chunki bu urunma $x_1 + x_2 = 6$ to'g'ri chiziq bilan ustma – ust tushadi. Bu to'g'ri chiziq og'ish burchagining tangensi esa -1 ga teng. Ikkinchi tomondan,

$$Z^* = 10(x_1^* - 3,5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2.$$

Ellipsga urunma oqish burchagining tangensini

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-20(x_1 - 3,5)}{40(x_2 - 4)}$$

formula orqali topish mumkin. Demak,

$$\frac{-(x_1^* - 3,5)}{2(x_2^* - 4)} = -1,$$

ya'ni

$$x_2^* - 4 = 0,5(x_1^* - 3,5).$$

Shunday qilib, masalaning optimal yechimi quyidagi sistemaning yechimidan iborat bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x_1^* + x_2^* &= 6, \\ x_2^* - 4 &= 0,5(x_1^* - 3,5), \\ Z^* &= 10(x_1^* - 3,5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^* &= 2,5, \\ x_2^* &= 3,5, \\ Z^* &= 15. \end{aligned}$$

3-§. Shartsiz optimallashtirish masalasi

Faraz qilaylik, shartsiz ekstremum masalasining yechimini topish talab qilingan bo'lsin, ya'ni $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning maksimumini (minimumini) $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ nuqtalarda qidirish kerak bo'lsin.

$f(X)$ funktsiya birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsa, uning ekstremumi quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\partial f(X) / \partial x_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (7.17)$$

Demak, berilgan $f(X)$ funktsiya X_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta (7.17) sistemaning yechimi bo'lishi kerak.

Haqiqatan, agar $f(X)$ funktsiya X_0 nuqtada mahalliy maksimumga erishsa, shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'ladiki, ixtiyoriy $X \in \varepsilon(X_0)$ nuqta uchun $(\varepsilon(X_0) \setminus X_0)$ nuqtaning kichik ε atrofida nuqtalar to'plami

$f(X) \leq f(X_0)$ tengsizlik bajariladi.

$X \in \varepsilon(X_0)$ nuqtada $X = X_0 + hl_j$, $0 < |h| < \varepsilon$ ko'rinishda yozamiz, bu erda l_j ($j = \overline{1, n}$) birlik vektorlar. U holda $0 < |h| < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi h uchun

$$f(X_0 + hl_j) - f(X_0) \leq 0, j = \overline{1, n} \quad (7.18)$$

o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\frac{f(X_0 + hl_j) - f(X_0)}{h} \leq 0, h > 0, \quad (7.19)$$

va

$$\frac{f(X_0 + hl_j) - f(X_0)}{h} \geq 0, h < 0. \quad (7.20)$$

(7.19) va (7.20) tengsizliklardan $h \rightarrow +0$ va $h \rightarrow -0$ da limitga o'tib mos ravishda $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} \leq 0$, va $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} \geq 0$, tengsizliklarni hosil qilish mumkin. Bulardan esa

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \quad (7.21)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 nuqta $f(X)$ funktsiyaga mahalliy minimum beruvchi nuqta bo'lgan holda ham (7.21) tengliklar X_0 nuqtada $f(X_0)$ funktsiya mahalliy maksimum yoki minimumga ega bo'lishi uchun, shu nuqtada undan n ta x_1, x_2, \dots, x_n noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalar 0 ga teng bo'lishi kerakligini ko'rsatadi. Lekin bundan (7.17) shartni qanoatlantiruvchi har qanday nuqta ham funktsiyaga mahalliy minimum yoki maksimum qiymat beradi degan xulosa kelib chiqmaydi. Masalan, bir argumentli $f(x)$ funktsiya uchun $f'(x) = 0$ shart egilish nuqtasida ham o'rinli bo'lib, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin. Xuddi shuningdek, ikki argumentli $f(x_1, x_2)$ funktsiya uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ shartlar egilish nuqtasida ham bajarilib, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin.

(7.17) sistemaning yechimlarini **statsionar nuqtalar** deb ataymiz. Berilgan $f(X)$ funktsiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funktsiya ekstremumga erishavermaydi.

Demak, (7.17) shart funktsiya ekstremumining mavjudligi uchun zaruriy shart, lekin u etarli shart emas. Quyidagi teorema statsionar nuqtaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari uzluksiz bo'lgan n o'zgaruvchili uzluksiz $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun etarlilik shartini ko'rsatadi.

Teorema. X_0 statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada **Gesse matritsasi** deb ataluvchi

$$H[X_0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsa musbat aniqlangan (bu holda X_0 - minimum nuqta) yoki manfiy aniqlangan (bu holda X_0 - maksimum nuqta) bo'lishi etarlidir.

Isboti. Teylor teoremasiga asosan, $0 < \theta < 1$ da

$$f(X_0+h) - f(X_0) = \nabla f(X_0)h + 1/2 h'H[X_0+\theta h] \cdot h, \quad (7.22)$$

bu erda $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ n o'lchovli vektor ustun, h' esa n o'lchovli vektor qator va $|h_j|$ ($j = \overline{1, n}$) etarli darajada kichik son, $H[X_0+\theta h]$ - Gesse matritsasining $X_0+\theta h$ nuqtadagi qiymati. $\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n} \right)$ - **n o'lchovli gradient** deb ataluvchi vektor.

X_0 nuqta statsionar nuqta bo'lganligi uchun bu nuqtada (7.21) o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$\nabla f(X_0) = 0. \quad (7.23)$$

(7.22) va (7.23) dan

$$f(X_0+h) - f(X_0) = 1/2 h'H[X_0+\theta h] \cdot h. \quad (7.24)$$

Faraz qilaylik, X_0 minimum nuqta bo'lsin. U holda

$$f(X_0+h) > f(X_0)$$

tengsizlik ixtiyoriy $h \neq 0$ uchun o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$1/2 h'H[X_0+\theta h] \cdot h > 0.$$

$f(X)$ funktsiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo'lgani uchun $1/2 h'H$ miqdor X_0 va $X_0+\theta h$ nuqtalarda bir xil ishorali bo'ladi va $h'H[X_0]h$ kvadratik formadan iborat bo'ladi. Shuning uchun bu formaning (jumladan $h'H[X_0+\theta h] \cdot h$ formaning) musbat bo'lishi $H[X_0]$ ning musbat aniqlangan matritsa bo'lishiga boqliq.

Demak, X_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo'lishi uchun shu nuqtadagi Gesse matritsasi ($H[X_0]$) musbat aniqlangan bo'lishi etarli ekan. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 statsionar nuqtaning maksimum nuqta bo'lishi uchun $H[X_0]$ ning manfiy aniqlangan bo'lishi etarli ekanligini ko'rsatish mumkin.

1-misol. Berilgan funktsiya ekstremumga tekshirilsin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Yechish. Funktsiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti:

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\text{Bundan } \partial f / \partial x_1 = 0, \quad \partial f / \partial x_2 = 0, \quad \partial f / \partial x_3 = 0.$$

Bu tenglamalarda tuzilgan sistemaning yechimi $X_0=(1/2, 2/3, 4/3)$ statsionar nuqta bo'ldi. Etarlik shartining bajarilishni tekshirish uchun Gesse matritsasini X_0 nuqtada tuzamiz:

$$H[X_0]=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning bosh minorlari mos ravishda - 2, 4, -6. Ma'lumki, agar matritsaning bosh minorlaridan tuzilgan sonlar ketma-ketligi ishora almashinuvchi bo'lsa, berilgan matritsa manfiy aniqlangan bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, $H[X_0]$ matritsa manfiy aniqlangan ekan. Demak, X_0 nuqtada $f(x_1, x_2, x_3)$ funktsiya maksimumga erishadi. Yuqorida keltirilgan misolda $f(x_1, x_2, x_3)$ ni $-f(x_1, x_2, x_3)$ ga almashtirib, $X_0=(1/2, 2/3, 4/3)$ nuqtani minimum nuqta ekanligini ko'rsatish mumkin.

Agar $H[X_0]$ noaniq matritsa bo'lsa, X_0 nuqta egilish nuqta bo'ladi, ya'ni bu nuqtada funktsiya ekstremumga erishmaydi. Buni quyidagi misolda ko'rsatamiz.

2-misol.

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

funktsiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartiga ko'ra

$\nabla f(X_0) = 0$. Demak $\partial f/\partial x_1 = 0$, $\partial f/\partial x_2 = 0$, ya'ni $8x_2 = 0$, $8x_1 + 6x_2 = 0$ bo'lishi kerak. Bu tenglamalardan tuzilgan sistemani yechib, $X_0=(0,0)$ statsionar nuqtani hosil qilamiz. Bu nuqtani ekstremal nuqta bo'lishlik shartini tekshirish uchun Gesse matritsasini tuzamiz

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning bosh minorlari: $M_{11}=6>0$, $M_{22}=0$. Matritsa determinanti esa - 64<0. Demak Gesse matritsasining ishorasi aniqlanmagan. Bu holda $X_0=(0,0)$ nuqta egilish nuqta bo'ladi.

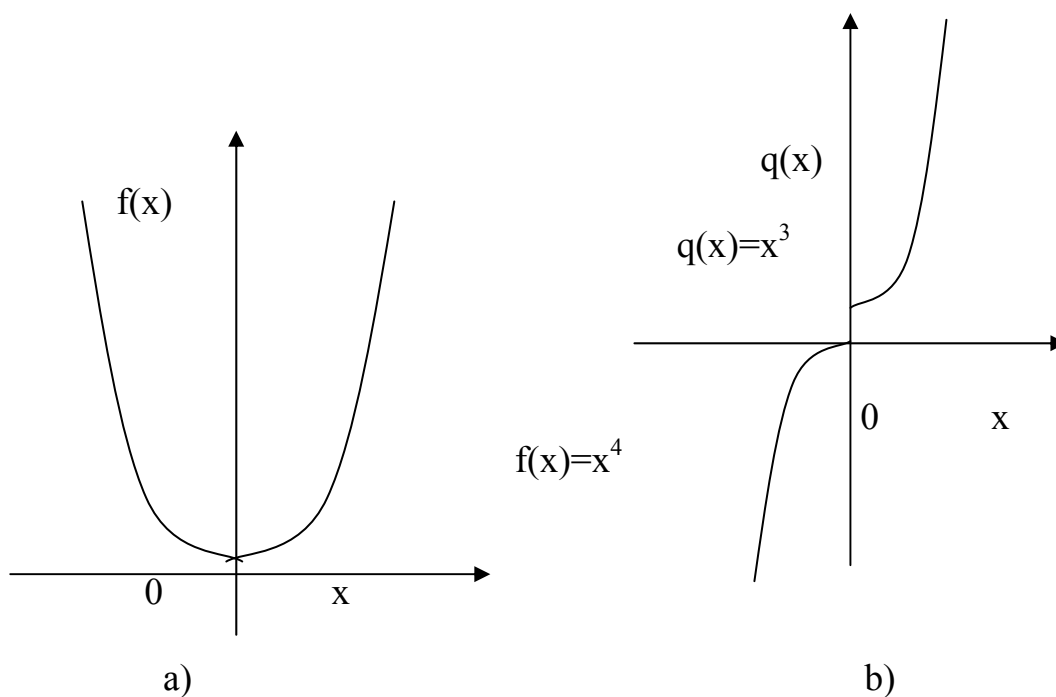
Yuqorida ko'rilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining etarlilik shartlari bir argumentli $f(x)$ funktsiya uchun quyidagicha bo'ladi. Faraz qilaylik, x_0 statsionar nuqta bo'lsin, u holda $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, x_0 statsionar nuqtada funktsiya maksimumga $f''(x_0) > 0$ bo'lganda esa minimumga erishadi. Agar $f''(x_0) = 0$ bo'lsa, yuqori tartibli hosilalarning x_0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o'rinlidir.

2-teorema. x_0 statsionar nuqtada $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ va $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lsa, bu nuqta a) n toq son bo'lganda egilish nuqta;

b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi hamda

$f^{(n)}(x_0) < 0$ da funktsiya maksimumga, $f^{(n)}(x_0) > 0$ da minimumga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida xavola qilamiz.



7.8- shakl.

3-misol.

1) $f(x) = x^4$ funktsiyaning ekstremumga tekshiring

$$f'(x) = 4x^3$$

bundan $x=0$ statsionar nuqta bo'ladi.

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0; f^{(4)}(0) \neq 0.$$

$n=4$ juft son. Demak, $x=0$ nuqta funktsiya uchun ekstremal nuqta bo'ladi.

$f^{(4)}(0) = 24 > 0$ bo'lgani uchun $x=0$ nuqtada berilgan funktsiya minimumga erishadi. (7.8 a-shakl).

$$2) g(x) = x^3,$$

$$g'(x) = 3x^2, x=0 \text{ statsionar nuqta}$$

$$g'(0) = g''(0) = 0, g'''(0) = 6 \neq 0$$

$n=3$ toq son. Demak, $x=0$ nuqta funktsiyaning egilish nuqtasi bo'ladi (7.8 b-shakl).

Agar E_n da aniqlangan $f(X)$ funktsiya X^* nuqtada global (absolyut) maksimum (minimum)ga ega bo'lsa, u shu nuqtada mahalliy maksimum (minimum)ga ega bo'ladi. Demak, X^* (7.17) sistemaning yechimi bo'lishi kerak. Shuning uchun $f(X)$ funktsiyaga global maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqtani topish uchun (7.17) sistemaning amma yechimlarini topib, ularning har birida $f(X)$ ning qiymatini hisoblab solishtiriladi. Shu qiymatlar orasida eng kattasi (eng kichigi) funktsiyaning global maksimumi (minimumi) bo'ladi.

Lekin noma'lumlar soni ko'p bo'lib, sistema yagona yechimga ega bo'lmasa, (7.17) sistemani yechish qiyin masala hisoblanadi va umuman (7.17) sistemani ixtiyariy ko'rinishda bo'lgan hol uchun yechish sxemasining o'zi mavjud emas. Shunga ko'ra bu sistemani yechish uchun turli taqribiy usullarni qo'llash mumkin. Ulardan biri quyidagi Nyuton-Rafson usulidir. Bu usul chiziqsiz tenglamalar sistemasini sonli yechish usulidan iborat.

Faraz qilaylik, umumiy holda $\varphi_i(X) = 0, i = \overline{1, m}$ $X = (x_1, \dots, x_n)$ tenglamalar sistemasi va ixtiyoriy X^k nuqta (ma'lum yaqinlashish) berilgan bo'lsin. U holda Teylor formulasiga ko'ra

$$\varphi_i(X) \approx \varphi_i(X^k) + [\nabla \varphi_i(X^k)]'(X - X^k), i = \overline{1, m}.$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi sistemaga almashtirish mumkin:

$$\varphi_i(X^k) + [\nabla \varphi_i(X^k)]'(X - X^k) = 0, i = \overline{1, m}$$

yoki matritsa formulada

$$A_k + V_k(X - X^k) = 0.$$

Bu erda barcha $\varphi_i(X^k)$ lar o'zaro bog'liq emas deb faraz qilinsa, V_k maxsus matritsa bo'ladi. Bu holda yuqoridagi tenglamadan

$$X = X^k - B_k^{-1} A_k$$

hosil bo'ladi.

Nyuton-Rafson usulining g'oyasi quyidagidan iborat. Birinchi qadamda boshlang'ich nuqta X^0 beriladi. Agar X^k topilgan bo'lsa yuqoridagi tenglamadan foydalanib, yangi X^{k+1} nuqtaning koordinatalarini topiladi. $X^m \approx X^{m-1}$ bo'lganda hisoblash jarayoni to'xtatiladi va X^m sistemaning taqribiy yechimi bo'ladi. Usulning yaqinlashishi boshlang'ich X^0 nuqtani tanlashga bog'liq. Agar bu nuqta noto'g'ri tanlansa, iteratsiyalash jarayoni uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Nyuton usulining kamchiligi shundan iboratki, unda yaxshi boshlang'ich nuqtani tanlash yo'llari ko'rsatilmagan.

4-§. Shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli ekstremum masalasi va uni yechish uchun Lagranj usuli

Faraz qilaylik (7.2), (7.4) masalani yechish talab qilinsin, ya'ni $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, i = \overline{1, m}$ tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi va $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtani topish kerak bo'lsin. $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar va ularning hammasi x_1, x_2, \dots, x_n noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalari uzluksiz deb faraz qilamiz. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda masalani Lagranjning aniqmas ko'paytiruvchilar usulini qo'llab yechish mumkin. Lagranj usulining g'oyasini quyidagi xususiy holda ko'ramiz. Faraz qilaylik, quyidagi masala berilgan bo'lsin

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= b, \\ Z = f(x_1, x_2) &\rightarrow \max(\min). \end{aligned} \quad (7.25)$$

$g(x_1, x_2)$ va $f(x_1, x_2)$ funktsiyalar uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiyalar.

$X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ nuqta $g(x_1, x_2) = b$ tenglamani qanoatlantirib, $Z = f(x_1, x_2)$ funktsiyaga mahalliy maksimum (minimum) qiymat berish uchun qanday zaruriy shartni qanoatlantirish kerak ekanligini ko'ramiz.

$X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ nuqtada $\partial g(X^0)/\partial x_1, \partial g(X^0)/\partial x_2$ xususiy hosilalardan kamida biri noldan farqli, masalan, $\partial g(X^0)/\partial x_2 \neq 0$ bo'lsin. U holda oshkormas funktsiyalar

haqidagi teoremaga asosan x_1^0 ning kichik $\varepsilon > 0$ atrofi mavjud bo'ladiki, bu atrofda $g(x_1, x_2) = b$ tenglamani x_2 ga nisbatan echish mumkin, ya'ni $x_2 = \varphi(x_1)$, bu erda φ funktsiya ($x_1^0, \varphi(x_1^0)$) nuqta atrofida uzluksiz differentsiallanuvchidir.

Har bir $(x_1, \varphi(x_1))$ nuqta masalaning joiz yechimlar to'plami G ga tegishli. Shuning uchun $f(x_1, x_2)$ funktsiyadan ham x_2 ni yuqotish mumkin, ya'ni

$$Z = F(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1)), \quad |x_1 - x_1^0| < \varepsilon.$$

Lekin, X^0 nuqtada f funktsiya $g(x) = b$ shartni qanoatlantiruvchi mahalliy maksimumga (minimumga) ega bo'lsa, x_1^0 ning $\varepsilon_0 (0 < \varepsilon_0 < \varepsilon)$ atrofidagi har qanday x_1 uchun $F(x_1) \leq F(x_1^0)$ [$F(x_1) \geq F(x_1^0)$] tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu holda $F(x_1)$ funktsiya x_1^0 da shartsiz maksimum (minimum) ga erishadi.

$F(x_1)$ funktsiya x_1^0 ning ε_0 atrofida differentsiallanuvchi va x_1^0 da shartsiz ekstremumga erishgani uchun

$$\frac{df(x_1^0)}{dx_1} = 0$$

bo'ladi. F funktsiyani murakkab funktsiya sifatida differentsiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2},$$

bunda oshkormas funktsiyalarga doir teoremaga asosan:

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = - \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2}.$$

ekanligi nazarga olinadi. X^0 nuqtada $F(X^0)$ funktsiya ekstremumga erishishi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g(X^0) / \partial x_1}{\partial g(X^0) / \partial x_2} = 0.$$

Agar

$$\lambda = \frac{\partial g(X^0) / \partial x_1}{\partial g(X^0) / \partial x_2} \left(\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_2} \neq 0 \right)$$

belgilash kiritsak, X_0 nuqtaning ekstremal nuqta bo'lishi uchun quyidagi zaruriy shartlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g(X^0)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g(X^0)}{\partial x_2} = 0, \\ g(X^0) = b \end{cases} \quad (7.26)$$

Hosil bo'lgan sistema uchta noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat. Bu sistemaning yechimidan iborat bo'lgan $X \in G$ nuqtada f funktsiya mahalliy maksimumga (minimumga) erishmasligi ham mumkin, lekin f funktsiyaga $g(x) = b$ shart bajarilganda mahalliy maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta albatta

(7.26) sistemaning yechimi bo'lishi kerak. Demak, (7.25) masalaning yechimini topish uchun (7.26) sistemaning hamma yechimlarini topish kerak. Bu sistema X^0 nuqtaning tenglamalari berilgan (7.25) shaklda bo'lgan masala yechimi bo'lishining zaruriy shartlaridir. Bu shartlarni quyidagi formal usul bilan ham hosil qilish mumkin. Buning uchun

$$F(X, \lambda) = f(X) + \lambda(b - g(X))$$

funktsiyani tuzamiz. Bu funktsiyadan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalar olib ularni 0 ga tenglaymiz:

$$\begin{cases} \partial F / \partial x_j = \partial f / \partial x_j - \lambda g' / \partial x_j = 0; j = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = b - g(X) = 0 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan sistema (7.26) sistemaning o'zidan iborat. Bu erda F - Lagranj funktsiyasi, λ - Lagranj ko'paytuvchilari deb ataladi. Endi umumiy holni, ya'ni noma'lumlar soni n ta va tenglamalar soni m ($m < n$) ta bo'lgan (7.2), (7.4) masalani ko'ramiz. Bu masala uchun Lagranj funktsiyasi

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b - g_i(X))$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Mahalliy ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X, \Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial F(X, \Lambda)}{\partial x_j} = b_i - g_i(X) = 0 \end{cases} \quad (7.27)$$

tenglamalar sistemasidan iborat. Agar $f(X)$ funktsiya $X_0 (x_1^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, shunday $\Lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ vektor mavjud bo'ladiki, uning uchun $(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ nuqta (7.27) sistemaning yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham X^* (7.2) – (7.4) masalaning ekstremum yechimi bo'lsin. U holda $g_i(X^*) = b_i, i = \overline{1, m}$. Bundan

$F(X^*, \Lambda) = f(X^*)$, demak,

$$\frac{\partial F(X^*, \Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$f(X)$ funktsiya X^* nuqtada ekstremal qiymatga erishsa, bu nuqta (7.27) sistemaning yechimi bo'lishi kerak. Lekin (7.27) shart etarli emas. (7.27) sistemaning yechimi $f(X)$ funktsiyaga ekstremum qiymat bermasligi ham mumkin.

Lagranj usulining amaliy ahamiyati shundan iboratki, bunda bir o'zgaruvchilarni boshqalari orqali ifodalash yoki hamma o'zgaruvchilarni o'zaro bog'liq emasligini nazarga olish talab qilinmaydi hamda shartli optimallashtirish masalasi shartsiz optimallashtirish masalasiga keltiriladi. Bu usulning kamchiligi (7.27) sistemaning yechish murakkabligi bilan bog'liq. Bundan tashqari shunday masalalar ham uchraydiki, ularning ekstremal rejalari mavjud bo'lishiga qaramay ularga mos keluvchi (7.27) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Masalan, quyidagi masalani qaraylik,

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

$$Z = x_1 \rightarrow \min.$$

Bu masalaning aniqlanish sohasi yagona $X=(0,0)$ nuqtadan iborat bo'lib, shu nuqtaning o'zi ekstremal nuqta bo'ladi. Lekin bu masala uchun mos bo'lgan (7.27) sistemaning yechib buni aniqlash qiyin. Haqiqatdan, Lagranj funktsiyasi $F(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)$ dan x_1, x_2, λ_1 lar bo'yicha xususiy hosilalar olib ularni 0 ga tenglasak,

$$\begin{cases} 1 + 2x_1\lambda_1 = 0, \\ 2\lambda_1x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemaning yechimi esa $X=(0,0)$ nuqtani bermaydi.

Bunday hollarning oldini olish va Lagranj usulini kengroq qo'llashga imkon yaratish uchun Lagranj funktsiyasini quyidagi

$$F(X, \Lambda) = \lambda_0 f(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x)) \quad (7.28)$$

ko'rinishda yozish maqsadga muvofiq ekanligi aniqlangan. Bu holda (7.27) sistemani yechishdagi formal qiyinchiliklar engillashadi va $\lambda_0 = 0$ da berilgan masala xos chegaraviy shartli bo'ladi. Yuqoridagi misolda bunga ishonch hosil qilish mumkin. Agar $f(X)$ funktsiya X_0 nuqtada ekstremumga erishsa, u

$$\lambda_0 (\partial f(X^0) / \partial x_j) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(X^0) / \partial x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$g_i(X^0) = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (7.29)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantirish kerak. ($\lambda_i (i = \overline{1, m})$ lardan kamida bittasi noldan farqli). Bu $m+n$ ta tenglamalar sistemasi shartli optimallashtirish masalasining yechimi mavjudligining zaruriy sharti hisoblanadi. Bu shartni (7.28) Lagranj funktsiyasining $x_j (j = \overline{1, n})$ va $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ lar buyicha xususiy hosilalarni 0 ga tenglab hosil qilish mumkin. Umumiylikni buzmasdan (7.29) da λ_0 ni 0 yoki 1 ga teng deb qabul qilish mumkin. Bu o'rinda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

1. Agar X^0 nuqtada $Q = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)$ matritsaning $r(Q)$ rangi va $Q_f = (Q/f)$ matritsaning rangi $r(Q_f)$ [$r(Q_f) \leq m+1$] teng bo'lsa, ya'ni $r(Q) = r(Q_f)$ bajarilsa, berilgan masala normal masala bo'ladi va $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilish mumkin.
2. X_0 nuqtada $r(Q_f) > r(Q)$ tengsizlik, bajarilganda (7.29) shartni qanoatlantiruvchi $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ lar orasida 0 dan farqlilari bo'lishi uchun $\lambda_0 = 0$ deb qabul qilish mumkin.
3. Agar X_0 nuqtada $r(Q_f) = r(Q) = m$ tenglik bajarilsa, $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ bir qiymatli aniqlanadi.
4. X_0 nuqtada $r(Q_f) > r(Q)$ yoki $r(Q_f) = r(Q) < m$ tengsizliklar o'rinli bo'lganda esa $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ lar ko'p qiymatli aniqlanadi.

Lagranj ko'paytuvchilari iqtisodiy ma'noga ega ekanini ko'rsatish uchun (7.4) tenglamalar sistemasining $b_i (i = \overline{1, m})$ ozod hadlari ma'lum bir intervalda o'zgaruvchan bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda $f(X)$ funktsiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqta ham o'zgaradi. Bu nuqtaning koordinatlari $b(b_1, \dots, b_n)$ vektorining funktsiyasidan iborat, ya'ni $x_j(b) = x_j(b_1, b_2, \dots, b_m)$, $j = \overline{1, n}$.

Buni nazarga olib tuzilgan Lagranj funktsiyasi ham b vektorining funktsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$F(b) = f(X(b)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(b) [b_i - g_i(X(b))]$$

Bu funktsiyadan b_i bo'yicha hosila olib

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_i} + \sum_{i=1}^m [b_i - g_i(X(b))] \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_i} + \lambda_i, i = \overline{1, m}.$$

ega bo'lamiz. Bundan (7.27) ga asosan

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i} = \lambda_i, i = \overline{1, m}.$$

$$F(X^*, \Lambda) = f(X^*) \quad \text{tenglik o'rinli bo'lganligi sababli}$$

$$\partial f(X^*) / \partial b_i = \lambda_i, (i = \overline{1, m}).$$

Bu tenglikka asosan λ_i b_i ozod hadlarning (resurslaring) o'zgarishi maqsad funktsiyasiga qanday ta'sir ko'rsatishini bildiradi. λ_i ning miqdoriga qarab har bir b_i parametрни optimal yechimga qo'shgan hissasini aniqlash mumkin

$$\frac{\partial f(X)}{\partial b_i} \cong \frac{\Delta f}{\Delta b_i} = \lambda_i \quad \text{yoki} \quad \Delta f = \lambda_i \Delta b_i$$

Agar $\Delta b = 1$ bo'lsa $\Delta f = \lambda_i$, ya'ni b_i parametрни bir birlikka o'zgartirish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati λ_i birlikka o'zgaradi.

Shunday qilib, λ_i larning $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ qiymatlari ma'lum bo'lsa, masalaning har bir chegaraviy shartining optimal yechimi $f(X^0)$ ga qo'shgan hissasini aniqlash mumkin. Jumladan, $\lambda_i^0 = 0$ bo'lganda tegishli tenglama masala uchun ahamiyatsiz bo'ladi. Bunday tenglamani tashlab yuborish ham mumkin. Agar $\lambda_i^0 > 0$ bo'lsa, u holda

$$g_i(X) = b_i$$

tenglamadagi ozod hadni bir birlikka o'zgartirsak, $Z = f(X)$ funktsiyaning qiymati λ_i^0 miqdorga o'zgarishini ko'rsatadi.

Klassik optimallashtirish masalasi (7.2)-(7.4) uchun yaratilgan Lagranj usulini noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilgan hol uchun hamda shartlari tengsizliklardan iborat bo'lgan shartli optimallashtirish masalalari uchun ham umumlashtirish mumkin.

Faraz qilaylik, (7.2)-(7.4) masalada noma'lumlarga nomanfiylik sharti kiritilgan bo'lsin, ya'ni quyidagi masalani yechish talab qilinsin:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad (7.30)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.31)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (7.32)$$

Bu erda f va g_i funktsiyalar uzluksiz va birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega. Maqsad funktsiya $x_j \geq 0$ shart bajariladigan sohaning ichki nuqtalarida yoki chegarasida ekstremumga erishishi mumkin.

Ekstremum nuqtani X^* bilan belgilaymiz. Agar X^* mumkin bo'lgan rejalar to'plamining ichki nuqtasi bo'lsa, u holda ekstremum mavjudligining zaruriy sharti (7.29) dan iborat bo'ladi. Demak, birinchi qadamda (7.29) sistemaning $x_j \geq 0$ sohada yotuvchi hamma yechimlarini topib, ular uchun Z funktsiyaning qiymatini aniqlash, so'ngra $x_j \geq 0$ sohaning chegarasini tekshirish kerak. Chegarada kamida bitta $x_j = 0$ bo'ladi. Faraz qilaylik faqat bitta x_j , masalan $x_k = 0$ bo'lsin. bu holda m ta tenglamali va $n-1$ o'zgaruvchili masalani ko'ramiz. Bu masala uchun (7.29) sistemani yechib, $x_j \geq 0$ sohaning ichida yotuvchi hamma yechimlarini topamiz va har bir yechimdagi Z funktsiyaning qiymatini aniqlaymiz. har bir noma'lumni 0 ga tenglash mumkin bo'lganlik uchun $n-1$ o'zgaruvchili va m ta tenglamali sistemani yechish kerak. So'ngra 2 ta o'zgaruvchini 0 ga teng deb qabul qilamiz va $n-2$ o'zgaruvchili m ta tenglamali masalani yechamiz. Bunday masalalar soni C_n^2 ga teng.

Bundan so'ng 3 ta o'zgaruvchini 0 ga teng deb qabul qilamiz va hokazo, oxirida $n-m$ ta noma'lumga 0 qiymat beramiz va m o'zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasidan iborat masalani yechamiz va qolgan m ta noma'lumning qiymatlarini topamiz. Bu nuqtalarning har birida Z funktsiyaning qiymatini hisoblaymiz. U qiymatlar ichida eng kattasi Z funktsiyaning global maksimumini, eng kichigi esa global minimumini beradi. Endi no'malumlarga nomanfiylik shartlari qo'yilmagan, lekin chegaraviy shartlarning bazilari tengsizliklardan iborat bo'lgan quyidagi masalani ko'ramiz:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_i, i = \overline{1, m_1}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}, \\ Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max(\min) \end{aligned}$$

Masaladagi tengsizliklarga $x_{si} (i = \overline{1, m_2})$ qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_{si} &= b_i, i = \overline{1, m_1}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{si} &= b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}, \\ x_{si} &\geq 0, i = \overline{1, m_2}, \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max(\min). \end{aligned}$$

Berilgan masaladagi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ shart $x_{si} \geq 0, i = \overline{1, m}$ shartga, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i$, shart esa $x_{si} \leq 0, i = \overline{m_1 + 1, m_2}$, shartga teng kuchlidir.

Z funktsiyaning global ekstremumini topish uchun E_n fazodagi nomanfiy oktantning hamma ichki nuqtalarini ($x_{si} \geq 0$) va chegaraviy nuqtalarini (bunda ba'zi $x_{si} = 0$) tekshirishimiz kerak bo'ladi: $x_{si} > 0 (i = \overline{1, m})$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda Lagranj funktsiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(X, X_s, \Lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - x_{si} - g_i(X)) + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \lambda_i (b_i + x_{si} - g_i(X)) + \sum_{i=m_2+1}^m \lambda_i (b_i - g_i(X))$$

(7.29) ga asosan bu funktsiyadan x_i, λ_i va x_{si} lar bo'yicha olingan barcha xususiy hosilalar 0 ga teng bo'lishi kerak. Jumladan, bu funktsiyadan x_{si} lar bo'yicha olingan xususiy hosilalarni 0 ga tenglab, qo'yidagiga ega bo'lamiz:

$$-\lambda_i = 0, i = \overline{1, m_1}$$

$$\lambda_i = 0, i = \overline{m_1 + 1, m_2}.$$

Bundan ko'rinadiki, agar ekstrimal nuqtada $x_{si} > 0 (i = \overline{1, m_2})$ bo'lsa, unga tegishli $\lambda_i = 0$ bo'ladi. Demak, tengsizlik ko'rinishidagi shartlarni ekstrimal nuqtalarni qidirish jarayonida tashlab yuborish mumkin. Boshqacha aytganda, $f(X)$ funktsiya global maksimum yoki minimumga erishadigan nuqtada biror chegaraviy shart qat'iy tengsizliklardan iborat bo'lsa, bu shartga qaramaslik mumkin.

Nomanfiy oktantning chegaraviy nuqtalarida ba'zi $x_{si}=0$ bo'lishi mumkin bo'lganligi uchun bunday x_{si} ga tegishli shart tenglamadan iborat bo'ladi, demak, mos λ_i 0 dan farqli bo'lishi mumkin, lekin $\lambda_i^0 \cdot x_{si}^0 = 0$ bo'ladi ($i = \overline{1, m_2}$). Bu holda $f(X)$ funktsiyaning global ekstremumini qo'yidagi yo'l bilan topish kerak.

Eng avval (7.29) sistemani tengsizliklardan iborat shartlar tashlab yuborilgan hol uchun echamiz. Topilgan har bir yechim uchun Z funktsiyaning qiymatini topamiz. So'ngra, masalan, bitta tengsizlik kiritib, bu jarayonni takrorlaymiz. Bu ishni har bir tengsizlik uchun bajaramiz. Bunday masalalar soni m_2 ta bo'ladi. Keyin esa masalaga 2 tadan tengsizlik kiritib yechamiz (hammasi bo'lib C_n^2 ta masala). Jarayon masalaga hamma tengsizliklar kiritulguncha davom ettiriladi. Hamma shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar orasida Z ga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi yechim berilgan masalaning global maksimumi (minimumi) bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan shuni ko'rish mumkinki, agar X^* nuqta $f(X)$ funktsiyaning global ekstremumi bo'lib, unga tegishli qo'shimcha o'zgaruvchilarning qiymatlari x_{si} va Lagranj ko'aytuvchilari $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ bo'lsa, $x_{si}^* = 0$ yoki $\lambda_i^* = 0$ ($i = \overline{1, m_2}$) ya'ni $\lambda_i^* \cdot x_{si}^* = 0$ bo'ladi.

Misol. Lagranj usulidan foydalanib, qo'yidagi chiziqsiz dasturlash masalasi yechilsin:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$Z = x_1 x_2 \rightarrow \max.$$

Yechish. Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda (x_1 + x_2 - 1).$$

Bu funktsiyadan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy xosilalar olib ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = -\frac{1}{2}, x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}, Z = \frac{1}{4}.$$

Tayanch so'z va iboralar

Chiziqsiz dasturlashlash; shartsiz optimallashtirish masalasi; mahaliy optimal yechim; global optimal yechim; separabel dasturlash masalasi; statik masalalar; gipertekislik; gipersirt; statsionar nuqta; Gesse matritsasi; n-o'lchovli gradient; musbat aniqlangan matritsa; manfiy aniqlangan matritsa; noaniq matritsa; egar nuqta; Nyuton-Rafson usuli; Lagranj ko'paytuvchilari; Lagranj funktsiyasi

Nazorat savollari

1. Chiziqsiz dasturlash masalasi qanday qo'yiladi?
2. Chiziqli va chiziqsiz dasturlash orasidagi farq nimadan iborat?
3. Shartsiz optimallashtirish masalasi nima?
4. Optimallashtirishning klassik masalasi nima?
5. Mahaliy va global optimal yechim deganda nimani tushunamiz?
6. Separabel dasturlash masalasi qanday yoziladi?
7. Statsionar nuqta nima?
8. Funktsiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti nimadan iborat?
9. Gesse matritsasi qanday matritsa?
10. Funktsiya ekstremumi mavjudligining etarlilik sharti qanday?
11. Shartlari tenglamalardan iborat chiziqsiz dasturlash masalasini yechishda Lagranj usulining g'oyasi qanday?
12. Lagranj funktsiyasi nima va u qanday tuziladi?
13. Lagranj ko'paytuvchilarining iqtisodiy ma'nosi nima?
14. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilgan otimal-lashtirishning klassik masalasini yechish uchun Lagranj usulining g'oyasi nimadan iborat?
15. Shartlarida tengsizliklar qatnashgan, lekin noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmagan chiziqsiz dasturlash masalasi Lagranj usuli bilan qanday yechiladi?

Masalalar

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasini yeching.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\leq 6 \\1. \quad 2x_1 + x_2 &\leq 11 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 &\rightarrow \min(\max)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 - x_2 &\geq 2 \\2. \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.5x_1 + x_2 &\leq 4 \\3x_1 + x_2 &\leq 15 \\3. \quad x_1 + x_2 &\geq 1 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\Z = 4(x_1 - 6)^2 + 6(x_2 - 2)^2 &\rightarrow \min\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\leq 6 \\4. \quad 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\Z = x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min(\max)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\geq 6 \\2x_1 + x_2 &\leq 8 \\5. \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\Z = x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

6. Quyidagi iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzing.

a) n ta korxonada bir xil mahsulot ishlab chiqariladi. Hamma korxonalarda ishlab chiqariladigan mahsulotning miqdori b birlikdan kam bo'lmashligi kerak. Har bir

$j(j: \overline{1, n})$ korxonada x_j miqdorida mahsulot ishlab chiqarishga sarf qilinadigan harajat ishlab chiqariladigan mahsulot miqdoriga bog'liq va $f(x_j)$ funktsiya ko'rinishida ifodalanadi. Korxonalarning ishlab chiqarish rejasini shunday aniqlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo'lsin.

b) xaridorning b so'm puli bor. U shu pulga bahosi P_1, P_2, P_3 so'mdan bo'lgan 3 xil mahsulot sotib olishi mumkin.

Xaridorning daromad funktsiyasi

$Y(X) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ ($\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$) ko'rinishida berilgan. Bunda x_1, x_2, x_3 – xaridor sotib oladigan mahsulotlarning mos ravishdagi miqdori. Qaysi mahsulotdan qancha sotib olganda, xaridorning sarf qilgan harajati o'zida bor puldan oshmaydi va uning daromadi maksimal bo'ladi?

Quyidagi masalalarni Lagranj usuli bilan yeching.

$$x_1 + x_2 = 2$$

7. $x_2 + x_3 = 2$

$$Z = x_1 \cdot x_2 + x_2 \rightarrow \max$$

8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$Z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

9. $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

10. $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 0$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max$$

11. $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 200$$

12. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$Z = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

13. $2x_1 - 3x_2 = 12$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \rightarrow \max(\min)$$

$$2x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = 12$$

14. $2x_1 - x_2 = 8$

$$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \rightarrow \max(\min)$$

VIII - BOB. QAVARIQ DASTURLASH

1-§. Qavariq to'plam. Qavariq funktsiyalar

Qavariq to'plam haqidagi ba'zi tushunchalar darslikning ilova qismida keltirilgan. Ularni quyidagi tushunchalar bilan to'ldiramiz. Ma'lumki

$$X = \{X \in E_n / X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1, -\infty < \lambda < +\infty\} \quad (8.1)$$

nuqtalar to'plami $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalar orqali o'tuvchi chiziqni aniqlaydi. $0 \leq \lambda \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun (8.1) $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani ifodalaydi. $0 \leq \lambda \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun $X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1$ nuqta X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

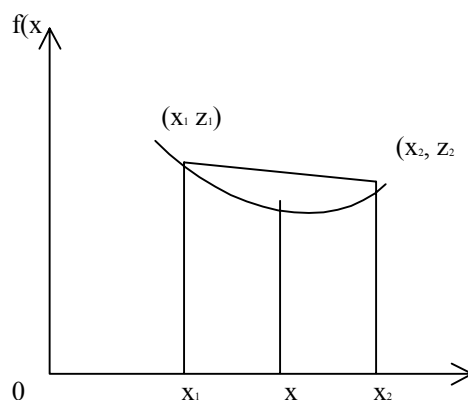
Agar $G \subset E_n$ to'plam o'zining ixtiyoriy X_1 va X_2 nuqtalari bilan birga bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasini ham o'z ichiga olsa, bunday to'plam **qavariq to'plam** deyiladi. $G \subset E_n$ qavariq to'plamga tegishli X nuqtani ixtiyoriy $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifoda etib bo'lmasa, bu nuqta G to'plamning burchak nuqtasi deyiladi. Burchak nuqta chegaraviy nuqta bo'lishi kerak, lekin har qanday chegaraviy nuqta burchak nuqta bo'lmaydi. Ba'zi chegaraviy nuqtalar burchak nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada yotishi mumkin. Agar G to'plam qavariq to'plam bo'lsa, u ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, \dots, X_n \in G$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan X nuqtani ham o'z ichiga oladi, ya'ni agar $X_1 \in G, X_2 \in G, \dots, X_n \in G$, bo'lsa,

$$X = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, X \in G, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $f(X)$ funktsiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \leq \lambda \leq 1$ son uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \quad (8.2)$$



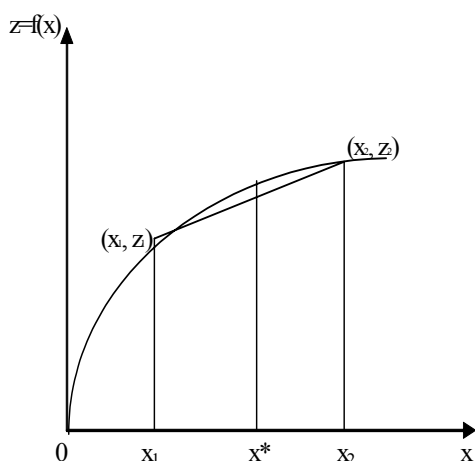
8.1. shakl

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funktsiya **pastga qavariq funktsiya** deyiladi. Boshqacha aytganda $Z=f(X)$ gipertekslilik pastga qavariq bo'lishi uchun uning

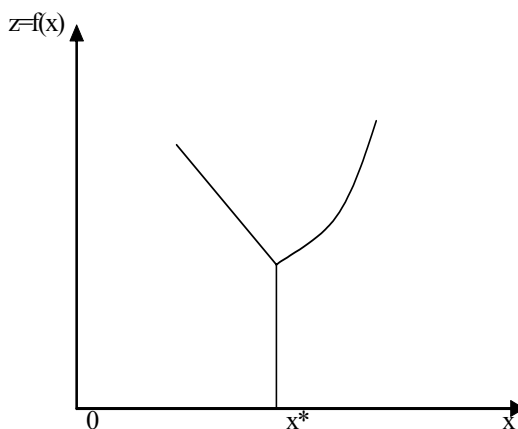
ixtiyoriy ikkita (X_1, Z_1) va (X_2, Z_2) nuqtalarni tutashtiruvchi kesma gipertekislikning sirtida yoki undan yuqorida yotishi kerak (8.1-shakl). Agar $f(X)$ funktsiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1 \in G$, $X_2 \in G$, nuqtalar va λ son ($0 \leq \lambda \leq 1$) uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \geq \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \quad (8.3.)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funktsiyani **yuqoriga qavariq funktsiya** deb ataladi. $Z=f(X)$ gipertekislik yuqoriga qavariq bo'lsa, uning ixtiyoriy ikkita (X_1, Z_1) va (X_2, Z_2) nuqtalarni tutashtiruvchi kesma shu gipertekislikning sirtida yotadi yoki uning pastidan o'tadi.



8.2- shakl



8.3-shakl

Agar ixtiyoriy ikkita $X_1, X_2 \in G$ nuqtalar va λ son ($0 \leq \lambda \leq 1$) uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) < \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \quad (8.4.)$$

yoki

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) > \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \quad (8.5.)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $G \in E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funktsiya qat'iy pastga qavariq yoki qat'iy yuqoriga qavariq bo'ladi.

Geometrik nuqtai nazardan qat'iy pastga (yuqoriga) qavariq funktsiyaning ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma unga nisbatan yuqoridan (pastdan) o'tadi.

Agar $f(X)$ funktsiya $G \in E_n$ da qat'iy yuqoriga qavariq bo'lsa, $-f(X)$ funktsiya shu to'plamda qat'iy pastga qavariq bo'ladi va aksincha. 8.3. shaklda $f(X)$ funktsiya $X > X^*$ da qat'iy pastga qavariq bo'lib, $X < X^*$ qat'iy pastga qavariq emas.

1-misol. $Z=CX$ chiziqli funktsiya E_n fazoning har qanday nuqtasida pastga (yuqoriga) qavariq bo'ladi. Haqiqatan, $X_1, X_2 \in E_n$ va ixtiyoriy son uchun

$$S(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) = \lambda S X_2 + (1-\lambda)S X_1 \quad (8.6)$$

o'rinli, lekin (8.6) dan ko'rinadiki, chiziqli funktsiya qat'iy yuqoriga ham, pastga ham qavariq bo'la olmaydi.

Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funktsiya bo'lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, \dots, X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(X_j),$$

$$\lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$
(8.7)

Xuddi shuningdek, agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan yuqoriga qavariq funktsiya bo'lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, \dots, X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(X_j),$$

$$\lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$
(8.8)

Qavariq funktsiyalarning ayrim **xossalari** bilan tanishamiz.

1-xossa. G qavariq to'plamda berilgan $f(X)$ funktsiya pastga qavariq bo'lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun $f(X) \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $X_1, X_2, \dots, X_n \in G$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular $f(X_1) \leq b$ va $f(X_2) \leq b$ tengsizligini qanoatlantirsin. U holda

$$X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2, \quad X \in G,$$

nuqta uchun $f(X) = f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2) \leq b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Haqiqatan ham, $f(X)$ pastga qavariq funktsiya bo'lganligi sababli:

$$f(X) = f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2) \leq (1-\lambda)f(X_1) + \lambda f(X_2) \leq b.$$

2-xossa. G qavariq to'plamda berilgan $f(X)$ funktsiya yuqoriga qavariq bo'lsa, b ixtiyoriy son bo'lganda

$$f(X) \geq b$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami yuqoriga qavariq bo'ladi.

3-xossa. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to'plamning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'lganligi sababli yuqoridagi 1-2 xossalardan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X) (i = \overline{1, m})$ funktsiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo'lib, $b_i(X) (i = \overline{1, m})$ ixtiyoriy sonlar bo'lganda $g_i(X) \leq b_i, (g_i(X) \geq b_i), i = \overline{1, m}$ tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami pastga (yuqoriga) qavariq bo'ladi.

4-xossa. Qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X) (i = \overline{1, m})$ funktsiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X), \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m},$$
(8.9)

funktsiya ham pastga (yuqoriga) qavariq bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $g_i(X)$ funktsiyalar pastga qavariq funktsiyalar bo'lsin, ya'ni

$$g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda g_i(X_1) + (1-\lambda)g_i(X_2) \quad (8.10)$$

tengsizlik ixtiyoriy haqiqiy son $0 \leq \lambda \leq 1$ uchun o'rinli bo'lsin.

U holda

$$g(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2).$$

Bundan (8.10) ga asosan

$$g(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\lambda g_i(X_1) + (1-\lambda)g_i(X_2))$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, i = \overline{1, m}$$

yoki

$$g(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X_1) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X_2) = \lambda g(X_1) + (1-\lambda)g(X_2). \quad (8.11)$$

(8.11) dan $g(X)$ funktsiyaning pastga qavariq ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, yuqoriga qavariq funktsiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham yuqoriga qavariq bo'lishini isbot qilish mumkin.

5-xossa. G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funktsiya pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarning tayin qiymatlarida, pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi zarur va etarlidir (isbotsiz qabul qilamiz).

6-xossa. Agar $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$ funktsiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan qavariq funktsiyalar bo'lsa,

$$f(X) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(X)$$

funktsiya ham qavariq bo'ladi.

2-§. Qavariq funktsiyaning ekstremumi

$f(X)$ qavariq funktsiyaning $G \subset E_n$ to'plamdagi global maksimumi (minimumi) deb, ixtiyoriy $X \in G$ nuqtada ham

$$f(X^0) \geq f(X) \quad (f(X^0) \leq f(X))$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0 \in G$ nuqtaga aytamiz. Agar bu tengsizlik $X^0 \in \varepsilon(X^0)$ ($\varepsilon(X^0) = \{X \mid |X - X^0| < \varepsilon\}$) nuqtada o'rinli bo'lsa, X^0 nuqta $f(X)$ funktsiyaga **mahalliy maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta** bo'ladi.

Qavariq funktsiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremlarni keltiramiz:

1-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funktsiya bo'lsa, uning ixtiyoriy mahalliy minimumi global minimum bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(X)$ funktsiya va $X^0 \in G$ da mahalliy $X^* \in G$ nuqtada global minimumga erishsin. U holda

$$f(X^0) > f(X^*).$$

$f(X)$ funktsiya pastga qavariq bo'lganligi sababli, ixtiyoriy $0 \leq \lambda \leq 1$ uchun

$$f(\lambda X^* + (1-\lambda)X^0) > \lambda f(X^*) + (1-\lambda)f(X^0), \quad (8.12)$$

G to'plamning qavariqligidan esa

$$X = \lambda X^* + (1-\lambda)X^0 \in G, \lambda \in [0,1].$$

(8.12) dagi $f(X^*)$ ni $f(X^0)$ ga almashtirsak,

$$f(\lambda X^* + (1-\lambda)X^0) \leq \lambda f(X^*) + (1-\lambda)f(X^0) = f(X) \quad (8.13)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. λ sonni shunday tanlab olamizki, natijada $X = \lambda X^* + (1-\lambda)X^0$ nuqta X^0 nuqtaga iloji boricha yaqin, ya'ni $|X - X^0| < \varepsilon$ bo'lsin. Lekin, bu holda (8.13) dan ko'rinadiki, X^0 nuqtada $f(X)$ funktsiya mahalliy minimumga erishmaydi. Bu teorema shartiga qarama-qarshidir. Demak, $X^* = X^0$ bo'lishi kerak.

2-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda pastga (yuqoriga) qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarda global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

Isboti. Faraz qilaylik, berilgan $f(X)$ funktsiya ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global minimumga erishsin. U holda ixtiyoriy $X \in G$ nuqta uchun $m = f(X_1) = f(X_2) < f(X)$ o'rinli bo'ladi. Bu erda m $f(X)$ funktsiyasining global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan \bar{X} nuqtani olamiz:

$$\bar{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$$

hamda bu nuqtadagi $f(X)$ funktsiyaning qiymatini aniqlaymiz:

$$f(\bar{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2).$$

$f(X)$ funktsiya pastga qavariq funktsiya bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$f(\bar{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2).$$

Bundan $f(X_1) = f(X_2) = m$ ekanini hisobga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(\bar{X}) = f(X_1) = m.$$

Demak, X nuqtada ham $f(X)$ funktsiya global minimumga erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Huddi shunday yo'l bilan yuqoriga qavariq $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, unga tegishli ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global maksimumga erishsa, u shu nuqtalarning ixtiyoriy qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan X nuqtada ham global maksimumga erishishini ko'rsatish mumkin.

3-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy pastga qavariq funktsiya bo'lsa, u o'zining global minimumga shu to'plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(X)$ funktsiya ikkita $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarda global minimumga erishsin, ya'ni

$$f(X_1) = f(X_2) = m. \quad (8.14)$$

bu erda m $f(X)$ funktsiyaning global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$\bar{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2.$$

nuqtani qaraymiz. Yuqorida isbot qilingan tioremaga asosan

$$f(\bar{X}) = m. \quad (8.15)$$

Ikkinchi tomondan $f(X)$ funktsiya qat'iy pastga qavariq bo'lganligi sababli

$$f(\bar{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan (8.14) ga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < m.$$

Shunday qilib, (8.15) ga zid bo'lgan xulosaga keldik. Shuning uchun farazimiz noto'g'ri bo'lib, teorema shartini qanoatlantiruvchi $f(X)$ funktsiya G to'plamning faqat bitta nuqtasida global minimumga erishadi degan xulosaga kelamiz.

4-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy yuqoriga qavariq funktsiya bo'lsa, u o'zining global maksimumiga shu to'plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Bu 3-teorema kabi isbot qilinadi.

5-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsa, ixtiyoriy ichki $X^0 \in G$ va $X \in G$ nuqtalar uchun

$$[\nabla f(X^0)]'(X - X^0) \leq f(X) - f(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu erda $\nabla f(X^0)$ funktsiyasining X^0 nuqtadagi gradienti:

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)'$$

Isboti. $f(X)$ funktsiya pastga qavariq bo'lganligi sababli ixtiyoriy $0 \leq \lambda \leq 1$ son uchun

$$f(\lambda X + (1-\lambda)X^0) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(X^0)$$

yoki

$$f(X^0 + \lambda(X - X^0)) \leq f(X^0) + \lambda(f(X) - f(X^0)).$$

Bundan

$$f(X^0 + \lambda(X - X^0)) - f(X^0) \leq \lambda(f(X) - f(X^0))$$

yoki

$$\frac{f(X^0 + \lambda(X - X^0)) - f(X^0)}{\lambda} \leq f(X) - f(X^0). \quad (8.16)$$

U holda Teylor formulasiga asosan

$$f(X^0 + \lambda(X - X^0)) = f(X^0) + \nabla f(X^0 + \theta\lambda(X - X^0)) \lambda(X - X^0), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

munosabat o'rinli bo'lganligi sababli ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ uchun (8.16) quyidagiga teng kuchli bo'ladi:

$$[\nabla f(X^0 + \theta\lambda(X - X^0))]'(X - X^0) \leq f(X) - f(X^0)$$

Bunda $\lambda \rightarrow 0$ da isbotlash talab qilingan

$$[\nabla f(X^0)]'(X - X^0) \leq f(X) - f(X^0), \quad \forall X \in G$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shunday yo'l bilan, $f(X)$ yuqoriga qavariq funktsiya bo'lgan hol uchun

$$[\nabla f(X^0)]'(X - X^0) \geq f(X) - f(X^0)$$

tengsizlikning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

6-teorema. Agar $F(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi funktsiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0) = 0$ bo'lsa, $f(X)$ funktsiya X^0 nuqtada global minimumga erishadi.

Isboti. $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi bo'lgani uchun yuqoridan isbot qilingan 5-teorema asosan

$$[\nabla f(X^0)]'(X - X^0) \leq f(X) - f(X^0), \quad \forall X \in G. \quad (8.17)$$

Bundan tashqari teorema shartiga ko'ra

$$\nabla f(X^0) = 0.$$

U holda (8.17) dan

$$f(X) - f(X^0) \geq 0,$$

ya'ni

$$f(X^0) \leq f(X), \quad \forall X \in G.$$

Demak, X^0 nuqtada $f(X)$ funktsiya eng kichik qiymatga (global minimumga) erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

7-teorema. Agar $f(X)$ funktsiya G qavariq to'plamda aniqlangan yuqoriga qavariq va differentsiallanuvchi funktsiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0) = 0$ bo'lsa, $f(X)$ funktsiya X^0 nuqtada global maksimumga erishadi.

Bu teorema yuqoridagi 6-teorema kabi isbot qilinadi.

3-§. Qavariq dasturlash. Kun-Takker shartlari

Qavariq dasturlash optimallashtirish masalasining bir bo'limi bo'lib, u pastga (yuqoriga) qavariq to'plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o'rgatadi. Boshqacha qilib aytganda, qavariq dasturlash masalasi deganda

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (8.18)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.19)$$

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (8.20)$$

ko'rinishdagi masala nazarda tutiladi, bunda $g_i(X)$, $f(X)$ funktsiyalar $G \in E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funktsiyalar. Agar $f(X)$, $g_i(X)$ funktsiyalar G da aniqlangan yuqoriga qavariq funktsiyalar bo'lsa, qavariq dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8.21)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.22)$$

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max. \quad (8.23)$$

(8.18)-(8.20) va (8.21)-(8.23) masalalarning yechimini aniqlashda klassik Lagranj usulini (VII-bob 4-§) chegaraviy shartlari orasida tengsizliklar qatnashgan masalalar uchun umumlashtirishga ko'maklashuvchi Kun-Tekker teoremasi markaziy o'rin egallaydi. Kun-Tekker teoremasi (8.18)-(8.20) yoki (8.21)-(8.23) masalaning optimal yechimi bilan bu masala uchun tuzilgan Lagranj funktsiyasining egar nuqtasi orasidagi munosabatni o'rgatadi. (8.18)-(8.20), (8.21)-(8.23) masalalarga mos keluvchi Lagranj funktsiyasini yuqorida (VII-bob 4-§) ko'rilgan usul yordamida tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

yoki vektor formada

$$F(X, \Lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X), \quad (8.24)$$

bu erda $\lambda_i (i = \overline{0, m})$ Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilari bo'lib,

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$$

1-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ nuqtada $F(X^0, \Lambda)$ funktsiya minimumga erishib, $\Lambda^0 = (\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ nuqtada $F(X, \Lambda^0)$ funktsiya maksimumga erishsa, (X^0, Λ^0) nuqta Lagranj funktsiyasi $F(X, \Lambda)$ ning egar nuqtasi bo'ladi. Agar (X^0, Λ^0) nuqta Lagranj funktsiyasi $F(X, \Lambda)$ ning egar nuqtasi bo'lsa, u holda X^0 ning kichik musbat ε atrofidagi $(\varepsilon(X^0) = \{X | |X - X^0| < \varepsilon\})$ ixtiyoriy $x_j \geq 0$ uchun va Λ^0 ning ε atrofidagi $(\varepsilon(\Lambda^0) = \{\Lambda | |\Lambda - \Lambda^0| < \varepsilon\})$ ixtiyoriy $\Lambda \geq 0$ uchun

$$F(X^0, \Lambda) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X, \Lambda^0) \quad (8.25)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Agar $F(X, \Lambda)$ Lagranj funktsiyasi (8.21-8.23) masala uchun tuzilgan bo'lsa, bu munosabat quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F(X, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda). \quad (8.26)$$

(8.25), (8.26) munosabatlar Lagranj funktsiyasi (8.24) ning egar nuqtasining mavjudligi haqidagi, $f(X)$ va $g_i(X)$ ($i = \overline{1, m}$) funktsiyalar differentsiallanuvchi bo'lmagan hol uchun, zaruriy va etarlilik shartlaridan iborat.

$f(X)$ va $g_i(X)$, ($i = \overline{1, m}$) funktsiyalar differentsiallanuvchi bo'lgan holda Lagranj funktsiyasi (8.24) ning egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va etarlilik shartlari (8.18)-(8.20) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j \geq 0, \quad (8.27)$$

$$x_j^0 \cdot \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j = 0, \quad x_j^0 \geq 0, \quad (8.28)$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i \leq 0, \quad (8.29)$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0. \quad (8.30)$$

Maqsad funktsiyasining maksimumi qidirilgan (8.21)-(8.23) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi :

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j \leq 0, \quad (8.31)$$

$$x_j^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j = 0, \quad x_j^0 \geq 0, \quad (8.32)$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i \geq 0, \quad (8.33)$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 0, \lambda_i^0 \geq 0. \quad (8.34)$$

Osonlik bilan ko'rsatish mumkinki, agar (8.27)-(8.30) va (8.31)-(8.34) munosabatlar bajarilsa, (8.25)- (8.26) munosabat o'z o'zidan bajariladi. Shuning uchun, bundan keyin Lagranj funktsiyasining egar nuqtasi mavjudligi haqida Kun-Takker shartlari sifatida (8.27) -(8.30) va (8.31)-(8.34) shartlarni tushunamiz. Bunda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. $F(X, \Lambda)$ funktsiya egar nuqtaga ega bo'lishi uchun maqsad funktsiyaning minimumi qidiriladigan (8.18) - (8.20) masala uchun (8.27) - (8.30) shartlarning, maqsad funktsiyaning maksimumi qidirilayotgan (8.21) - (8.23) masala uchun (8.31) - (8.34) shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir.

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Qavariq dasturlash masalasi (8.18) - (8.20) uchun ekstremum mavjudligining zaruriy va etarlik shartlari qanday hosil bo'lishi bilan tanishamiz. Buning uchun masalaga $m+n$ ta s_i ($i=\overline{1, m}$) va t_j ($j=\overline{1, n}$) qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + s_i = b_i, \quad i=\overline{1, m}, \quad (8.35)$$

$$x_j - t_j = 0, \quad j=\overline{1, n}, \quad (8.36)$$

$$s_i \geq 0, \quad t_j \geq 0, \quad (8.37)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min. \quad (8.38)$$

(8.37) tengsizliklar berilgan masalaning chegaraviy shartlaridan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilganligidan dalolat beradi. (8.35-8.38) masala uchun Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(X, \Lambda) = \lambda_0 f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [(b_i - s_i - g_i(x_1, \dots, x_n))] + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j (t_j - x_j) \quad (8.39)$$

Mahalliy ekstremum mavjudligining zaruriy shartidan:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j = 0, \quad j=\overline{1, n}, \quad (8.40)$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 0, \quad \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \bar{\lambda}_j = 0, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, n}, \quad (8.41)$$

(8.40) tenglikni tahlil qilamiz. Uni quyidagicha yoyib yozish mumkin:

$$\lambda_0^0 \partial f(X^0) / \partial x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \partial g_i(X^0) / \partial x_j - \bar{\lambda}_j^0 = 0. \quad (8.42)$$

Bundan tashqari

$$\begin{cases} b_i - s_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ t_j - x_j^0 = 0 \end{cases} \quad (8.43)$$

tengliklar o'rinli t_j^0 noma'lumlar bilan bog'liq bo'lgan $\bar{\lambda}_j^0$ Lagranj ko'paytuvchisi uchun

$$\bar{\lambda}_j^0 t_j^0 = 0$$

shart bajarilishi kerak (VII bob, 4-§ ga qarang). Agar $t_j^0 > 0$ (demak $x_j^0 = 0$) bo'lsa, $\bar{\lambda}_j^0 = 0$ bo'ladi va (8.42) ga asosan

$$\lambda_0^0 \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \partial g_i(X^0)/\partial x_j = 0. \quad (8.44)$$

Agar $t_j^0 = 0$ (demak, $x_j^0 = 0$) bo'lsa, u holda $\bar{\lambda}_j^0$ noldan farqli bo'lishi ham mumkin. Uning ishorasi quyidagi mulohaza orqali aniqlanadi: agar $x_j - t_j = 0$ tenglikning o'ng tomonini manfiy songa o'zgartirsak, (8.18)-(8.20) masalaning aniqlanish sohasi kengayadi, chunki ixtiyoriy $x_j \geq 0$ miqdor $x_j \geq b_j$ ($b_j < 0$) tengsizlikni qanoatlantiradi va $Z^0 = f(X^0)$ miqdor o'zgarmaydi (ortmaydi), demak, $\partial f(X^0)/\partial b_j \geq 0$ yoki $\bar{\lambda}_j^0 \geq 0$. Shunday qilib, $x_j = 0$ da zaruriy shart quyidagidan iborat bo'ladi:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j = \lambda_0^0 \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \partial g_i(X^0)/\partial x_j \geq 0, \quad (8.45)$$

$$x_j^0 \partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j = [\lambda_0^0 \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \partial g_i(X^0)/\partial x_j] X^0 = 0. \quad (8.46)$$

Endi $\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, tenglikni xuddi yuqoridagidek tahlil qilib, quyidagi zaruriy shartlarni hosil qilamiz:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_i \leq 0, \quad (8.47)$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0, \lambda_i^0 \geq 0. \quad (8.48)$$

(8.45)-(8.48) shartlar (8.21)-(8.25) masala uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j \leq 0, \quad (8.49)$$

$$x_j^0 (\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j) = 0, x_j^0 \geq 0, \quad (8.50)$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_i \geq 0, \quad (8.51)$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0, \lambda_i^0 \geq 0. \quad (8.52)$$

Yuqoridagi (8.45)-(8.48), (8.49)-(8.52) shartlar berilgan qavariq programmalash masalasining ekstremumi mavjudligining zaruriy va etarlilik shartidan iboratdir.

4 - §. Kun - Takker teoremasi

Yuqoridagi (8.21)-(8.23) qavariq dasturlash masalasini ko'ramiz.

Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) > b_i (i = \overline{1, m})$ tengsizlik bajarilsa (bunga Sleyter sharti deyiladi), Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o'rinli bo'ladi.

Teorema. $X^0 \geq 0$ nuqta (8.21)-(8.23) masalining optimal yechimi bo'lishi uchun bu nuqtada (8.49)-(8.52) shartlarining bajarilishi zarur va etarlidir.

Isboti. Zaruriylikning isboti 3-§ dagi (8.45)-(8.48) va (8.49)-(8.52) shartlarini keltirib chiqarish jarayonida ko'rsatilgan.

Etarliligi: Faraz qilaylik X^0 nuqtada (8.49)-(8.52) shartlar bajarilsin. U holda shunday $\Lambda^0 \geq 0$ mavjud bo'lib, (X^0, Λ^0) nuqta $F(X, \Lambda)$ Lagranj funktsiyasining egar nuqtasi bo'ladi, ya'ni bu nuqtada (8.26) munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$F(X, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda).$$

Bu erda

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(X) - b_i). \quad (8.53)$$

(8.53) dan foydalanib, (8.26) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i) &\leq f(X^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq \\ &\leq f(X^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(X^0) - b_i), \quad X \rightarrow \geq 0, \Lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

(8.54) ning o'ng tomonidagi

$$f(X^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(X^0) - b_i)$$

munosabat ixtiyoriy $\Lambda \geq 0$ uchun o'rinli. Bundan (8.51) va (8.52) ga asosan

$$g_i(X^0) - b_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) = 0. \quad (8.55)$$

Endi (8.54) ning chap tomonidagi tengsizlikdan, (8.55) ga asosan,

$$f(X^0) \geq f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i), \quad \forall X \geq 0,$$

bu erda $g_i(X) > b_i$ (Sleyter sharti) va $\lambda_i^0 \geq 0$, demak,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i) \geq 0.$$

Shuning uchun $f(X^0) \geq f(X), \forall X \geq 0$. Bundan X^0 berilgan masalaning optimal yechimi ekanligi ko'rinadi. Shu bilan teorema isbotlandi.

1-misol. Masalani grafik usulda yeching va topilgan yechim uchun Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

$$2x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

Masalaning grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X_0=(0,8;0,4)$ va $f(0,8;0,4)=0,8$ ekanini ko'rishimiz mumkin.

Endi shunday $\Lambda^0 \geq 0$ mavjud bo'lib, (X^0, Λ^0) da Kun-Takker shartlarining bajarilishini ko'ramiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$f(X, \Lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2)$$

X^0 nuqtada masalaning 2-chegaraviy sharti qat'iy tengsizlikka aylanadi. Demak, bu masala uchun Steyler sharti bajariladi. Bu holda masala normal bo'lib, $\lambda_0 \neq 0$ bo'ladi. Shuning uchun $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilinadi.

Lagranj funktsiyasidan $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz va $X_0=(0,8;0,4)$ nuqtada Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\partial F / \partial x_1 = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, \quad \partial F / \partial x_2 = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \lambda_1 &= 2x_1 + x_2 - 2, & \partial F / \partial \lambda_2 &= 8 - 2x_1 - x_2, & \partial F / \partial \lambda_3 &= 6 - x_1 - x_2 & \partial F(X^0, \Lambda^0) / \\ \partial \lambda_2 &= 8 - 2 \cdot 0,8 - 0,4 = 6 > 0, \end{aligned}$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_3 = 6 - 0,8 - 0,4 = 4,8 > 0,$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 0.$$

Shartga ko'ra λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

$$\partial F(X^0, \Lambda) / \partial \lambda_1 = 2 \cdot 0,8 + 0,4 - 2 = 0$$

bo'lgani uchun λ_1 nolga teng bo'lmagan qiymat qabul qilishi ham mumkin.

$$x_j^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j = 0, \quad x_j^0 > 0.$$

Demak,

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_j = 0, \quad j = 1, 2 \text{ bo'lishi kerak, ya'ni}$$

$$-2 \cdot 0,8 + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$-2 \cdot 0,4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$\lambda_2, \lambda_3 = 0$ bo'lgani uchun $\lambda_1 = 0,8$ va $\Lambda^0 = (0,8, 0, 0)$. Demak $(X_0, \Lambda_0) = (0,8; 0,4; 0,8; 0,0)$ nuqtada xaqiqatdan ham, Kun-Takker shartlari bajarilyapti, ya'ni u egar nuqta bo'layapti.

2-misol. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $X_0=(0,1)$ nuqta quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasining yechimi ekanligini ko'rsatilsin:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 8,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$Z = f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 \rightarrow \min.$$

Yechish. $X^0=(1,0)$ nuqtada chegaraviy shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi, demak, Sleyter sharti bajariladi. Bu xolda $\lambda_0=1$ deb qabul qilishimiz mumkin. Shuning uchun Lagranj funktsiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 + \lambda_1(4x_1 + 5x_2 - 8) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - 4).$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_1 = (2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)_{x_0} \geq 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_1) \cdot x_1^0 = 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_2 = (6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)_{x_0} \geq 0.$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_2) \cdot x_2^0 = 0, x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_1 = (4x_1 - 5x_2 - 8)_{x_0} = -4 < 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_1) \cdot \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow \lambda_1^0 = 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_2 = (2x_1 + x_2 - 4)_{x_0} = -2 < 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_2) \cdot \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0$$

Shunday qilib, $(X_0, \Lambda_0) = (1; 0; 0; 0)$ nuqta Kun-Takkerning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u Langraj funktsiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun $X_0(1,0)$ nuqta berilgan chiziqsiz dasturlash masalasining yechimidan iborat.

Tayanch so'z va iboralar

Qavariq to'plam; qavariq funktsiya; pastga qavariq funktsiya; yuqoriga qavariq funktsiya; qat'iy qavariq funktsiya; qavariq dasturlash; Langraj funktsiyasi; egar nuqta; Kun-Takker shartlari; Kun-Takker teoremasi;

Nazorat savollari

1. Qavariq to'plam deganda qanday to'plamni tushunasiz?
2. Qavariq to'plamning ichki va chegaraviy nuqtasi tushunchasi nimadan iborat?
3. Pastga (yukoriga) qavariq funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
4. Agar $f(X)$ pastga (yuqoriga) qavariq funktsiya bo'lib qavariq G to'plamda aniqlangan bo'lsa va b - ixtiyoriy xaqiqiy son bo'lsa $f(x) < b$ ($f(x) > b$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qanday to'plam bo'ladi?
5. Qavariq funktsiyaning qavariq to'plamdagi global maksimumi (minimumi) nima?
6. Qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funktsiyaning mahalliy va global ekstemumlari orasida qanday munosabat o'rinli bo'ladi?
7. Qavariq dasturlash masalasining umumiy ko'rinishi qanday?
8. Lagranj funktsiyasining egar nuqtasi nima?
9. $f(x)$ va $g_i(x)$ funktsiyalari differentsiallanuvchi bo'lgan hol uchun Lagranj funktsiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va etarlilik sharti qanday?
10. Lagranj funktsiyasining egar nuqta mavjudligini zaruriy va etarlilik shartini $f(x)$ va $g_i(x)$ funktsiyalar differentsiallanuvchi bo'lgan hol uchun izohlang.
11. Kun- Takker teoremasini ta'riflang?
12. Sleyter sharti qanday va u qachon ishlatiladi?

Masalalar.

1. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $X_0=(0,8; 0,4)$ nuqtaning quyidagi qavariq dasturlash masalasining yechimi ekanligini aniqlang:

$$\begin{aligned}2x_1+x_2 &\geq 2, \\2x_1+x_2 &\leq 8, \\x_1+x_2 &\leq 6, \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \\Z = f(x_1, x_2) &= -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2. Grafik usulini qo'llab, quyidagi masalalarning yeching va yechimni Kun-Takker shartlarini qanoatlantirishini tekshiring:

a) $\begin{aligned}2x_1+5x_2 &\geq 20, \\x_1-2x_2 &= 5, \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \\Z = f(x_1, x_2) &= 3x_1 x_2 - x_2^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}x_2+x_2 &\leq 5, \\0,3x_1+x_2 &\leq 3, \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \\Z = f(x_1, x_2) &= 5 x_1^2 - 3x_1 - 4x_2^2. \rightarrow \max.\end{aligned}$

v) $\begin{aligned}3x_1+2x_2 &\leq 9, \\0,5x_1+x_2 &\leq 4, \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \\Z = f(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$

3. Koordinata boshidan

$$\begin{aligned}x_1+x_2 &\geq 4, \\2x_1+x_2 &\geq 5.\end{aligned}$$

tengsizliklar orqali aniqlangan qavariq to'plamgacha bo'lgan minimal masofani aniqlang. Yechimni grafik usulda aniqlab, uning uchun Kun-Takker shartlari o'rinli ekanligini tekshiring.

IX-BOB. KVADRATIK DASTURLASH

Kvadratik dasturlash masalasi chiziqsiz (qavariq) dasturlash masalasining xususiy holdan iboratdir. Uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funksiyasi umumiy holda chiziqli va kvadratik formalarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, i = \overline{1, m}, \quad (9.1)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (9.2)$$

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \dots + d_{nn}x_n^2 \rightarrow \max(\min) \quad (9.3)$$

yoki matritsa formada:

$$AX \{ \leq, =, \geq \} B, \quad (9.4)$$

$$X \geq 0, \quad (9.5)$$

$$Z = C'X + X'DX \rightarrow \max(\min), \quad (9.6)$$

bu erda A $m \times n$ o'lchovli matritsa, D n o'lchovli kvadrat matritsa, B m o'lchovli, X , C n o'lchovli vektorlar. Shunday qilib, (9.1)-(9.3) yoki (9.4)-(9.6) ko'rinishda berilgan masalani **kvadratik dasturlash masalasi** deb ataymiz.

Bu masala chiziqli dasturlash masalasidan shunisi bilan farq qiladiki, uning maqsad funksiyasida kvadratik forma $X'DX$ qatnashadi. Bu kvadratik formaga bog'liq ravishda $f(X)$ maqsad funktsiya pastga yoki yuqoriga qavariq bo'lishi mumkin. Ana shunday hollar uchun, ya'ni kvadratik dasturlash masalasi yagona optimal (global) yechimiga ega bo'lgan hollar uchun masalani yechish usullari yaratilgan.

Darslikning ushbu bobida kvadratik formalar va ularning xossalari va bu xossalarning $f(X)$ maqsad funksiyasiga ta'siri, kvadratik dasturlash masalasini yechish usullari keltirilgan.

1-§. Kvadratik formalar va ularning kanonik ko'rinishi

Kvadratik formalar va ularning kanonik shakli quyidagicha bo'lsin. U holda

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}x_i x_j = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \dots + d_{nn}x_n^2 + 2d_{12}x_1x_2 + 2d_{13}x_1x_3 + \dots + 2d_{n-1,n}x_{n-1}x_n = X'DX \quad (9.7)$$

ko'rinishdagi funktsiyaga kvadratik forma deyiladi, bu erda

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X' = (x_1, x_2, \dots, x_n), (d_{ij} = d_{ji}), \quad i, j = \overline{1, n}$$

(9.3) kvadratik funktsiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi (9.7) kvadratik formaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishligiga bog'liqdir. Bu esa o'z navbatida $XD X$ formaning manfiy yoki musbat, nomanfiy yoki nomusbat aniqlanganligiga, yoki umuman, ishorasi aniqlanmaganligiga bog'liqdir.

1-ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha X lar uchun $XD X < 0$ o'rinli bo'lsa, $XD X$ **manfiy aniqlangan kvadratik forma** deyiladi.

2-ta'rif. Agar $X'D X \leq 0$ tengsizlik barcha $X \neq 0$ lar uchun to'g'ri bo'lsa va $X \neq 0$ mavjud bo'lib, uning uchun $XD X = 0$ tenglik bajarilsa, $XD X$ **nomusbat aniqlangan kvadratik forma** deyiladi

Agar $XD X$ kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'lsa $XD X$ kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

X ning ba'zi qiymatlari uchun $XD X$ musbat, ba'zilar uchun manfiy qiymat qabul qilishi mumkin. U holda $XD X$ aniqmas kvadratik forma deyiladi.

Kvadratik formani chiziqli almashtirishlar yordami bilan faqat noma'lumlarning kvadratlaridan tuzilgan formaga keltirish mumkin. Bunday ko'rinishdagi kvadratik forma **kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma** deb ataladi.

(9.7)ni kanonik ko'rinishga keltirib, uning qanday aniqlangan ekanligini, shu bilan bir qatorda uning pastga yoki yuqoriga qavariq ekanligini aniqlash mumkin.

Haqiqatdan ham, agar kvadratik forma

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lib, $a_i > 0, j = \overline{1, n}$ bo'lsa, kvadratik forma musbat aniqlangan, $a_i < 0, j = \overline{1, n}$ da esa manfiy aniqlangan bo'ladi.

Agar $a_j > 0, (j = \overline{1, n_1})$ va $a_j < 0, (j = \overline{n_1 + 1, n})$ bo'lsa, kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

Misol. Berilgan

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - \frac{5}{4}x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{5}{4}x_3^2$$

kvadratik forma kanonik ko'rinishga keltirilsin.

Berilgan kvadratik formaga mos keluvchi D matritsa

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. $Q(x_1, x_2, x_3)$ formadagi x_1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -3(x_1^2 - 2x_1 \frac{4x_2 + x_3}{12}) - \frac{5}{4}x_2^2 - x_2x_3 - \frac{5}{4}x_3^2.$$

Qavs ichidagi ifodani to'la kvadratga keltiramiz:

$$Q(x_1 x_2 x_3) = -3\left(x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12}\right)^2 - x_2 x_3 - \frac{5}{4}x_3^2 + \frac{(4x_2 + x_3)^2}{48}$$

yoki

$$Q(x_1 x_2 x_3) = -3\left(x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12}\right)^2 - \frac{11}{12}x_2^2 - \frac{5}{6}x_2 x_3 - \frac{59}{48}x_3^2.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x_1' = x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12}$$

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3.$$

Bulardan

$$x_1 = x_1' + \frac{1}{3}x_2' + \frac{1}{12}x_3'$$

$$x_2 = x_2' \quad (1)$$

$$x_3 = x_3'.$$

U holda $Q(x_1, x_2, x_3)$ kvadratik forma quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1'^2 + Q_1$$

bu erda

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{5}{6}x_2'x_3' - \frac{59}{48}x_3'^2.$$

Endi Q_1 formani o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{5}{6}x_2'x_3' - \frac{59}{48}x_3'^2 = \\ &= -\frac{11}{12}(x_2'^2 + 2 \cdot \frac{5}{11}x_2'x_3') - \frac{59}{48}x_3'^2 = \\ &= -\frac{11}{12}\left(x_2' + \frac{5}{11}x_3'\right)^2 - \frac{59}{48}x_3'^2 + \frac{25}{132}x_3'^2 = \\ &= -\frac{11}{12}\left(x_2' + \frac{5}{11}x_3'\right)^2 - \frac{183}{176}x_3'^2 \end{aligned}$$

yana qaytadan belgilashlar kiritamiz

$$x_1'' = x_1', x_2'' = x_2' + \frac{5}{11}x_3', x_3'' = x_3'.$$

Bulardan

$$x_1' = x_1''.$$

$$x_2' = x_2'' - \frac{5}{11}x_3'' \quad (2)$$

$$x_3' = x_3''.$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2''^2 - \frac{183}{176}x_3''^2,$$

u holda

$$Q = -3x_1''^2 - \frac{11}{12}x_2''^2 - \frac{183}{176}x_3''^2.$$

x_1, x_2, x_3 noma'lumlarning qiymatlarini x_1'', x_2'', x_3'' lar orqali ifodalash mumkin.

Buning uchun (1) va (2) almashtirishlarga mos keluvchi matritsani o'zaro ko'paytirish kerak, ya'ni agar (1) almashtirishga

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa, (2) almashtirishga

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa mos kelsa u holda

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{3}{44} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Demak,

$$x_1 = x_1'' + \frac{1}{3}x_2'' - \frac{3}{44}x_3''$$

$$x_2 = x_2'' - \frac{5}{11}x_3''$$

$$x_3 = x_3''.$$

Endi $D_I = C' DC$ matritsani aniqlaymiz:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{44} & -\frac{5}{11} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{11}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix}.$$

D_1 matritsa $Q(x_1'', x_2'', x_3'')$ kvadratik formaga mos keladi

$$Q(x_1'', x_2'', x_3'') = -3x_1'' - \frac{11}{12}x_2'' - \frac{183}{176}x_3''.$$

Agar S matritsa xosmas matritsa bo'lsa, musbat (manfiy) aniqlangan forma musbat (manfiy) aniqlanganicha qoladi. $Q(x_1, x_2, x_3)$ formada koeffitsientlar manfiy va S xosmas matritsa $|C|=1$ bo'lganligi sababli $Q(x_1, x_2, x_3)$ manfiy aniqlangan forma bo'ladi.

Endi kvadratik formani kanonik formaga keltirmasdan uning qanday aniqlangan forma ekanligini aniqlash mumkinmi?- degan savol tug'iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagi teoremlarni isbot qilamiz.

1-teorema. Agar

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j, \text{ kvadratik formadagi.}$$

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \quad (9.8)$$

determinantlar noldan farqli bo'lsa, $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$Q = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2,$$

bu erda

$$a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, i = \overline{1, n}.$$

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $a_{11} = D_1 \neq 0$ bo'lgani sababli Q formada x_1 ni ajratib, uni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$Q = a_{11} x_1'^2 + Q(x_2', \dots, x_n').$$

$D_2 \neq 0$ bo'lganligi uchun x_2' ning oldidagi koeffitsient noldan farqli. Shuning uchun uchburchakli almashtirishni bajarib, ikkinchi kvadratni ajratish mumkin. Faraz

qilaylik, k ta kvadrat ajratilgan bo'lsin. U holda Q forma quyidagi ko'rinishga keltirilgan bo'ladi

$$Q = a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 + \dots + a_k t_k^2 + Q_k(t_{k+1}, \dots, t_n).$$

$D_{k+1} \neq 0$ bo'lgani uchun uchburchakli almashtirishni yana bir marta bajarib, yana bir kvadratni ajratish mumkin. Shunday qilib, uchburchakli almashtirishni n marta bajarib $Q(x_1, \dots, x_n)$ formani kanonik ko'rinishga keltiriladi. (9.8) determinantlar uchburchakli almashtirishga nisbatan invariant bo'lganliklari uchun $a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$ ni hosil qilib, D matritsani shunday diagonal ko'rinishga keltiramizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$a_{11} = d_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

bu erda

$$a_1 = d_{11}, a_1 \cdot a_2 = D_2, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = D_3, \dots, a_1 \cdot a_2 \dots a_n = D_n.$$

a_1, a_2, \dots, a_n larning har biri noldan farqli bo'lganligi uchun

$$a_1 = d_{11}, a_2 = \frac{D_2}{D_1}, a_3 = \frac{D_3}{D_2}, \dots, a_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Demak teorema isbotlandi.

Shunday qilib, a_i koeffitsientlarning ishorasi D_i determinantlarning ishoralariga bog'liq ekan.

Kvadratik formaning ko'rinishini aniqlashda quyidagi hollar ro'y berishi mumkin:

1-hol. Agar D_1, D_2, \dots, D_n determinantlarning har biri musbat bo'lsa, a_i koeffitsientlar ham musbat bo'lib, Q kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi.

2-hol. Agar $1, D_1, D_2, \dots, D_n$ sonlar ketma ketligida ishoralar navbat bilan almashib kelsa, a_i koeffitsientlar manfiy bo'lib, Q forma manfiy aniqlangan bo'ladi.

3-hol. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lsa hamda D_1, D_2, \dots, D_r determinantlar musbat ishorali bo'lib, qolganlari nolga teng bo'lsa, Q kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

4-hol. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lib, $1, D_1, D_2, \dots, D_n$ qatorda ishoralar almashib kelsa hamda $D_{r+1} = D_{r+2} = \dots = D_n = 0$ bo'lsa Q kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'ladi.

5-hol. Agar $1, D_1, D_2, \dots, D_n$ sonlar ketma ketligida ishoralar almashmasa hamda manfiy ishorali D_i determinantlar mavjud bo'lsa, Q kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

Misol. Kvadratlik formaning ko'rinishi aniqlansin:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$$

Yechish:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, D_1 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11/4$$

$1, D_1, D_2, D_3$ sonlar ketma ketligida ishoralar navbat bilan almashuvchi bo'lganligi sababli $Q(x_1, x_2, x_3)$ forma manfiy aniqlangan bo'ladi

2-teorema. Nomanfiy $Z = X'DX$ kvadratlik forma E_n Evklid fazosida qavariq funktsiyadir. Agar kvadratlik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u **qat'iy qavariq funktsiya** bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy X_1, X_2 nuqtalar va λ sonni ($0 \leq \lambda \leq 1$) olib,

$$\mathcal{X} = \lambda X_2 + (1 - \lambda)X_1$$

nuqtani tuzamiz va bu nuqtada $Z = X'DX$ kvadratlik formaning qiymatini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}'D\mathcal{X} &= (\lambda X_2 + (1 - \lambda)X_1)'D(\lambda X_2 + (1 - \lambda)X_1) = (X_1 + \lambda(X_2 - X_1))'D(X_1 + \\ &+ \lambda(X_2 - X_1)) = X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Teoremani shartiga ko'ra ixtiyoriy X uchun ($X \neq 0$) $X'DX \geq 0$. Shuning uchun

$$\lambda X'DX \geq \lambda^2 X'DX, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (9.10)$$

(9.10) ga asosan (9.9) dan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\mathcal{X}'D\mathcal{X} \leq X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1), \quad (9.11)$$

yoki

$$\mathcal{X}'D\mathcal{X} \leq X_1'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_2 \leq \lambda X_2'DX_2 + (1 - \lambda)X_1'DX_1. \quad (9.12)$$

(9.12) tengsizlik $X'DX$ kvadratlik formaning qavariq funktsiyasi ekanligini ko'rsatadi.

Endi $Z = X'DX$ kvadratlik forma musbat aniqlangan deb faraz qilamiz. U holda ixtiyoriy $0 < \lambda < 1$ uchun

$$\lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) > \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) \quad (9.13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, (9.11) da \leq ishorani $<$ bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$\mathcal{X}'D\mathcal{X} < X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1). \quad (9.14)$$

Bundan

$$\mathcal{X}'D\mathcal{X} < \lambda X_2'DX_2 + (1 - \lambda)X_1'DX_1$$

(9.15)

(9.15) tengsizlik $Z = X'DX$ kvadratlik formaning qat'iy qavariq ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Xuddi shunday mulohazalar yordamida quyidagi teoremani ham isbot qilish mumkin.

3–teorema. Nomusbat $Z = X'DX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida yuqoriga qavariq funktsiyadir. Agar kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, u qat'iy yuqoriga qavariq funktsiya bo'ladi.

2-§. Kvadratik dasturlash masalalari uchun Kun-Takker shartlari

Kvadratik dasturlash masalasi ((9.1)-(9.3)) berilgan bo'lsin. Maqsad funktsiyaning minimumi qidiriladigan masalani uning maksimumi qidiriladigan maslaga keltirish mumkin bo'lgani sababli (9.3) ning o'rniga bundan keyin

$$Z = f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \dots + d_{nn}x_n^2 \rightarrow \max \quad (9.16)$$

funktsiyaning yoki matritsali formadagi

$$Z = f(x) = C'X + X'DX \rightarrow \max \quad (9.17)$$

funktsiyaning ko'ramiz.

Bundan keyin $f(X)$ funktsiyaning yuqoriga qavariq funktsiya, ya'ni $Z = X'DX$ kvadratik formani yuqoriga qavariq ($X'DX$ -manfiy aniqlangan forma) deb faraz qilamiz. Bu holda (9.1)-(9.2) shartlarni qanoatlantiruvchi rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lgani uchun kvadratik dasturlash masalasi yagona (global) optimal yechimga ega bo'ladi.

Masalaning (9.1) shartlarini qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish mumkin bo'lgani uchun (9.1)-(9.3) masalani quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \quad (9.18)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (9.19)$$

$$Z = f(X) = \sum_{j=1}^n c_jx_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj}x_kx_j \rightarrow \max, \quad (9.20)$$

yoki matritsa formada

$$AX = B, \quad (9.21)$$

$$X \geq 0, \quad (9.22)$$

$$Z = f(X) = C'X + X'DX \rightarrow \max \quad (9.23)$$

Bu masalaning yechimi optimal yechim bo'lishining zaruriy va etarlilik shartlarini aniqlaymiz. Buning uchun Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^n c_jx_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj}x_kx_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j), \quad (9.24)$$

yoki matritsali formada

$$F(X, \Lambda) = C'D + X'DX + \Lambda'(B - AX). \quad (9.25)$$

$F(X, \Lambda)$ funktsiyadan $x_j (j = \overline{1, n})$ $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{dF}{dx} = c_i + 2 \sum_{k=1}^n x_k d_{kj} - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}, \quad (9.26)$$

yoki

$$\frac{\partial F}{\partial X} = C' + 2DX - A'\Lambda, \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (9.28)$$

$$\frac{dF}{d\Lambda} = B - AX. \quad (9.29)$$

Endi (9.26)-(9.29) munosabatlarga asoslanib, Kun-Takkerning shartlarini yozamiz:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X^0, \Lambda^0} \leq 0, \quad X'_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X^0, \Lambda^0} = 0, \quad X^0 \geq 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \right)_{X^0, \Lambda^0} \geq 0, \quad \lambda_i^0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \right)_{X^0, \Lambda^0} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0.$$

Bundan (9.26), (9.28) ga asosan:

$$c_j + 2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k^0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 a_{ij} \leq 0, \quad (9.31)$$

$$x_j^0 (c_j + 2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k^0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 a_{ij}) = 0, \quad (9.32)$$

$$x_j^0 \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (9.33)$$

$$b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \geq 0, \quad (9.34)$$

$$\lambda_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0) = 0, \quad (9.35)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.36)$$

(9.31)-(9.36) shartlar matritsali formada quyidagicha ifodalanadi:

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 \leq 0, \quad (9.31)$$

$$X^0 (C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0) = 0, \quad (9.32)$$

$$X^0 \geq 0, \quad (9.33)$$

$$B - AX^0 \geq 0, \quad (9.34)$$

$$\Lambda^0 (B - AX^0) = 0, \quad (9.35)$$

$$\Lambda^0 \geq 0 \quad (9.36)$$

Agar shunday Λ^0 vektor mavjud bo'lib, X^0, Λ^0 lar uchun (9.31)-(9.36) shartlar o'rinli bo'lsa, X^0 vektor berilgan kvadratik dasturlash masalasi (9.21)-(9.23) ning optimal yechimi bo'ladi.

Endi (9.31) tengsizlikni qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yordamida tenglamaga aylantiramiz

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 + V^* = 0.$$

Bundan

$$V^* = A'\Lambda^0 - 2DX^0 - C'. \quad (9.37)$$

Bu holda kvadratik dasturlash masalasi yechimining optimal yechim bo'lishlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$C' + 2DX^* - A'\Lambda^* + V^* = 0. \quad (9.38)$$

$$X^*V^* = 0, X^* \geq 0, V^* \geq 0. \quad (9.39)$$

Berilgan masaladagi (9.21) shartlar tenglama ko'rinishda bo'lganligi sababli Λ ga musbat bo'lishlik sharti qo'yilmaydi. Bundan tashqari, (9.34)-(9.35) shartlar ixtiyoriy bazis rejalar uchun o'rinli bo'lganligi sababli ularni tashlab yuborish mumkin. Demak, xulosa qilib shuni aytish mumkinki, quyidagi

$$\begin{cases} AX = B \\ 2DX - A'\Lambda^0 + V + C' = 0, \\ X'V = 0, \\ X \geq 0, V \geq 0. \end{cases} \quad (9.40)$$

$$\quad (9.41)$$

$$\quad (9.42)$$

$$\quad (9.43)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $X \geq 0, V \geq 0$ vektorlar berilgan (9.21)-(9.22) masalaning yechimini bildiradi. Agar bu (9.40)-(9.43) sistema yagona yechimga ega bo'lsa, berilgan kvadratik dasturlash masalasi ham yagona (global) optimal yechimga ega bo'ladi. Agar (9.40)-(9.43) sistema birgalikda bo'lmasa, berilgan kvadratik dasturlash masalasi ham yechimga ega bo'lmaydi. Shunday qilib, berilgan (9.21)-(9.23) kvadratik dasturlash masalasini yechimini (9.40)-(9.43) sistemaning yechimi orqali topish mumkin. Bu sistemaning yechimini topish masalasi quyidagicha quyiladi: (9.40)-(9.41) tenglamalar sistemasining shunday nomanfiy ($X \geq 0, \Lambda \geq 0$) bazis yechimini topish kerakki, u $X'V$ ko'paytmani nolga aylantirsin. Demak, xulosa qilib aytish mumkinki, agar kvadratik dasturlash masalasi ((9.21)-(9.23)) optimal yechimga ega bo'lsa, bu yechim (9.40)-(9.41) tenglamalar sistemasining bazis yechimlarining biridan iborat bo'ladi.

1-masala. Quyidagi kvadratik dasturlash masalasining yechimini Kun-Takker shartlaridan foydalanib toping:

$$x_1 + 2x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z = f(x) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max.$$

$$(9.44)$$

Echish. Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(X, \Lambda) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 + \lambda_1(13 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(9 - 2x_1 - x_2).$$

Bu funktsiyadan x_1, x_2, λ_1 va λ_2 lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= -8x_1 + 8 + 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -12x_2 + 44 + 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 13 - x_1 - 2x_2, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= 9 - 2x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Endi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} -8x_1 + 8 + 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, \\ -12x_2 + 44 + 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \\ 13 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 9 - 2x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (9.45)$$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx_1} \cdot x_1 &= 0, \\ \frac{dF}{dx_2} \cdot x_2 &= 0, \\ \frac{dF}{d\lambda_1} \cdot \lambda_1 &= 0, \\ \frac{dF}{d\lambda_2} \cdot \lambda_2 &= 0.\end{aligned} \quad (9.46)$$

(9.45) sistemaning yechimlari orasidan (9.46) ni qanoatlantiruvchisini aniqlash kerak. (9.45) sistemaga o'zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 8, \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 44, \\ x_1 + 2x_2 + v_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + v_4 = 9 \end{cases} \quad (9.47)$$

(9.46)ga asosan v_1, v_2, v_3, v_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$x_1 v_1 = 0, x_2 v_2 = 0, \lambda_1 v_3 = 0, \lambda_2 v_4 = 0 \quad (9.48)$$

(9.47) sistemaga w_1, w_2 sun'iy bazis o'zgaruvchilarni kiritib, uni quyidagi chiziqli dasturlash masalasi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + \omega_1 = 8, \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + \omega_2 = 44 \\ x_1 + 2x_2 + v_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + v_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, v_4 \geq 0, \end{cases} \quad (9.49)$$

$$Z = M\omega_1 + M\omega_2 \rightarrow \min . \quad (9.50)$$

(9.49)-(9.50) masalani simpleks jadvalga joylashtiramiz (9.1-jadval). Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 44 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

bu belgilashlarda hamma noma'lumlar simpleks jadvalga $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2$ tartibda joylashtirilgan. Masalani simpleks usulda yechib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 4, v_3^* = 3, v_4^* = 1.$$

Topilgan yechim (9.49)-(9.50) masalaning bazis yechimi bo'ladi. Bu yechim (9.48) shartlarni qanoatlantiradi:

$$x_1 v_1 = 0, x_2 v_2 = 0, \lambda_1 v_3 = 0, \lambda_2 v_4 = 0,$$

shuning uchun u berilgan (9.44) kvadratik dasturlash masalasining yechimidan iborat.

$$x_2^* = 2, x_2^* = 4, Z = f(X^*) = 96.$$

9.1-jadval

B.B.	c^b	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
P_9	M	8	8	-2	1	2	-1	0	0	0	1	0
P_{10}	M	44	-2	12	2	1	0	-1	0	0	0	1
P_7	0	13	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
P_8	0	9	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Δ		52M	6M	10M	3M	3M	-M	-M	0	0	0	0
P_9	M	$\frac{46}{3}$	$\frac{23}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	0	0	1	
P_2	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	0	
P_7	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	
P_8	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{13}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	0	1	0	
Δ	0	$\frac{46}{3}M$	$\frac{23}{3}M$	0	$\frac{4}{3}M$	$\frac{13}{6}M$	-M	$-\frac{M}{6}$	0	0	0	
P1	0	2	1	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{13}{46}$	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{1}{46}$	0	0		
P2	0	4	0	1	$\frac{4}{46}$	$\frac{13}{92}$	$-\frac{3}{138}$	$-\frac{2}{23}$	0	0		
P7	0	3	0	0	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{25}{46}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{9}{46}$	1	0		
P8	0	1	0	0	$-\frac{45}{46}$	$-\frac{16}{23}$	$\frac{13}{46}$	$\frac{13}{92}$	0	1		
		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

3-§. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun

Barankin-Dorfman usuli

Barankin-Dorfman usuli (9.21)-(9.23) masalaning yechimini (9.40)-(9.43) sistemasini yechish orqali topishga mo'ljallangan bo'lib, uning g'oyasi quyidagidan iborat. Eng avval (9.40)-(9.41) sistemaning ixtiyoriy bazis rejasi topiladi. Bu bazis reja asosida qator simpleks almashtirishlar bajarib $X'B$ ko'paytmaning bazis qiymati kamaytirib boriladi. Natijada $X'B=0$ tenglikka mos keluvchi bazis yechim topiladi. Faraz qilaylik, (9.40)-(9.43) sistemaning ixtiyoriy bazis yechimi topilgan bo'lsin. Bu holda bazis o'zgaruvchilar ozod o'zgaruvchilarning funktsiyasi sifatida ifoda qilinadi.

Qulaylik uchun x_j, λ_r, v_i bazis o'zgaruvchilarni y_j bilan ($v_i = y_{i+n}$), ozod o'zgaruvchilarni esa t_k lar bilan belgilaymiz. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x_1 = b_{10} + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n, \\ y_2 = x_2 = b_{20} + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n, \\ \dots\dots\dots, \\ y_n = x_n = b_{n0} + a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n, \\ y_{n+1} = v_1 = b_{n+1,0} + a_{n+1,1}t_1 + a_{n+1,2}t_2 + \dots + a_{n+1,n}t_n, \\ y_{n+2} = v_2 = b_{n+2,0} + a_{n+2,1}t_1 + \dots + a_{n+2,n}t_n, \\ \dots\dots\dots, \\ y_{2n+m} = \lambda_m = b_{2n+m,0} + a_{2n+m,1}t_1 + \dots + a_{2n+m,n}t_n, \end{array} \right. \quad (9.51)$$

yoki

$$y_j = b_{j0} + \sum_{k=1}^n a_{jk} t_k, \quad j = \overline{1, 2n+m}. \quad (9.52)$$

Agar y_j o'zgaruvchi ozod o'zgaruvchi t_k ga mos qo'yilgan bo'lsa, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y_i = t_k = 0 + 0 \cdot t_1 + \dots + 0 \cdot t_{k-1} + 1 \cdot t_k + 0 \cdot t_{k+1} + \dots + 0 \cdot t_n \quad (9.53)$$

(9.52) belgilashlar yordamida noma'lumlarni quyidagi tartibda joylashtirish mumkin:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, v_2, \dots, v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$$

Bu holda bazis yechim uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} y_j &= b_{j0}, t_k = 0 \\ T &= X^T V = \sum_{j=1}^n b_{j0} \cdot b_{n+j,0}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Endi faraz qilaylik, bazisga yangi $t_k = \theta_k > 0$ o'zgaruvchi kiritilsin. U holda, agar qolgan $t_h (h \neq k)$ o'zgaruvchilarni nolga teng deb qaraganda bazis o'zgaruvchilarning qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$y_i = b_{i0} + \theta_k a_{ik}$$

t_k o'zgaruvchining qiymati quyidagicha tanlanadi:

$$t_k = \theta_k = \min_{a_{JK} < 0} \left\{ \frac{b_{j0}}{a_{jk}} \right\}.$$

Bunda yangi bazis yechim topilgan bo'ladi va bu yechim uchun $T = X'V$ quyidagi qiymatni qabul qiladi:

$$\begin{aligned} Tk &= X'V = \sum_{j=1}^n (b_{j0} + \theta_k a_{jk})(b_{n+j,0} + \theta_k a_{n+j,k}) = \\ &= \sum_{i=1}^n b_{j0} b_{n+j,0} + \theta_k \left(\sum_{j=1}^n b_{j0} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^n a_{jk} b_{n+j,0} \right) + \theta_k^2 \sum_{j=1}^n a_{jk} a_{n+j,k} = T + \theta_k R_k, \end{aligned} \quad (9.55)$$

bu erda

$$T = \sum_{j=1}^n b_{j,0} b_{n+j,0}, \quad (9.56)$$

$$(9.57)$$

$$R_k = a_k + \theta_k \beta_k,$$

$$a_k = \sum_{j=1}^n b_{j,0} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^n a_{jk} b_{n+j,0}, \quad (9.58)$$

$$\beta_k = \theta_k \sum_{j=1}^n a_{jk} a_{n+j,k}. \quad (9.59)$$

Simpleks almashtirishlar natijasida $T=X' V$ ning qiymati kamaya borishi kerak. Shuning uchun bazisga $R_k < 0$ ga mos keluvchi t_k o'zgaruvchi kiritiladi. Agar manfiy R_k lar bir nechta bo'lsa, u holda bazisga $\min_{R_k < 0} R_k \cdot \theta_k$ ga mos keluvchi t_k vektor kiritiladi.

Ma'lumki, β_k ifoda T dan t_k bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosildan iborat. T qavariq bo'lganligi sababli har doim $\beta_k > 0$ bo'ladi. Demak, R_k ishorasi a_k ning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun $a_k \geq 0$ bo'lganda β_k, θ_k va R_k larni hisoblamaslik mumkin. Agar barcha t_k lar uchun $T > 0$, $R_k > 0$ bo'lsa, Barankin-Dorfman usulini qo'llab bo'lmaydi.

1-misol.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

$$Z = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

Bu masala uchun (9.40)-(9.43) sistema quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 6, \\
-2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_1 &= -10, \\
2x_1 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_2 &= 0, \\
-\lambda_1 + v_3 &= 0, \\
-\lambda_2 + v_4 &= 0, \\
x_j \geq 0, v_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

Bu sistemaning boshlang'ich bazis yechimini aniqlaymiz. Buning uchun birinchi tenglamadan x_3 ni, ikkinchisidan x_4 ni, to'rtinchisidan v_2 , beshinchisidan v_4 ni ajaratamiz hamda uchinchi tenglamani λ_2 ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 10 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 6 - x_1 - x_2, \\
\lambda_2 &= 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1 \\
v_2 &= -2x_1 + 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2, \\
v_3 &= \lambda_1, v_4 = \lambda_2.
\end{aligned} \tag{9.60}$$

λ_2 qiymatini v_2, v_4 larga mos keluvchi ifodalarga qo'yamiz.

Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases}
x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 = 6 - x_1 - x_2 \\
\lambda_2 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1, \\
v_2 = 10 - 4x_1 + 6x_2 + \lambda_1 + v_1, \\
v_3 = \lambda_1, \\
v_4 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1.
\end{cases} \tag{9.61}$$

(9.61) sistemaga

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 + x_1 + 0 + \dots + 0, \\
x_2 &= 0 + 0 + x_2 + \dots + 0, \\
v_1 &= 0 + 0 + \dots + v_1
\end{aligned}$$

tenglamalarni qo'shib to'ldiramiz va 9.2-jadvalga joylashtiramiz. Jadvalga bazisga kiritiladigan noma'lumni aniqlashga ko'maklashuvchi qo'shimcha qism kiritilgan. Bu qo'shimcha jadvalning $\alpha_k, \beta_k, \theta_k$ va R_k elementlari yuqoridagi (9.52), (9.54), (9.56)- (9.59) formulalar orqali aniqlanadi.

9.2-jadval

$y_i \backslash t_k$	x_0	x_1	x_2	v_1	λ_1
x_1	0	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0
x_3	10	-1	-2	0	0
x_4	6	-1	-1	0	0
v_1	0	0	0	1	0
v_2	10	-4	6	1	1
v_3	0	0	0	0	1
v_4	10	-2	2	1	-1
λ_2	10	-2	2	1	-1
α_k	60	-22	12	6	4
β_k		2			
θ_k		2,5			
R_k		-17			

(9.56) va (9.58) formulalarga ko'ra:

$$\alpha_0 = T_0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 10 = 60,$$

$$\alpha_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 10 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 10 = -22,$$

$$\alpha_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 10 = 12,$$

$$\alpha_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 = 6,$$

$$\alpha_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4.$$

9.2-jadvaldan ko'rinadiki, α_k ning faqat bitta qiymati manfiy ($\alpha_1 = -22$).

Demak, x_1 noma'lumni bazisga kiritish natijasida T ning qiymatini kamaytirish mumkin. Shuning uchun β_k, θ_k, R_k larni faqat x_1 ga mos keluvchi ustun uchun hisoblash kerak:

$$\beta_1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 2,$$

$$\theta_1 = \min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{6}{1}, \frac{10}{4}, \frac{10}{2}, \frac{10}{2} \right\} = 2,5,$$

$$R_1 = \alpha_1 + \theta_1 \beta_1 = -17,$$

$$T_1 = T_0 + \theta_1 R_1 = 60 - 17 \cdot 2,5 = 17,5.$$

Bu erda $T_1 \neq 0$. Shuning uchun x_1 noma'lumni bazisga kiritib, v_1 ni bazisdan chiqaramiz.

Natijada 9.3-jadvalni hosil qilamiz.

9.3-jadvaldan (9.56),(9.58) formulalarga asosan $\alpha_k (k = \overline{0,4})$ ning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\alpha_0 = \frac{5}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{15}{2} \cdot 0 + \frac{7}{2} \cdot 5 = \frac{35}{2},$$

$$\alpha_0 = \frac{5}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{15}{2} \cdot 0 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 3,$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{15}{2} \cdot 0 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} + (-1) + \frac{3}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 5 = -16,$$

$$\alpha_3 = \frac{5}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \frac{15}{2} \cdot 0 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 5 = 3,$$

$$\alpha_4 = \frac{5}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{15}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 5 = 1.$$

9.3- jadval.

	x_0	v_2	x_2	v_1	λ_1
x_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	0
x_3	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
v_1	0	0	0	1	0
v_2	0	1	0	0	0
v_3	0	0	0	0	1
v_4	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
λ_2	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
α_k	$\frac{35}{2}$	3	-16	3	1
β_k			$\frac{5}{2}$		
θ_k			$\frac{7}{5}$		
R_k			$-\frac{25}{2}$		

Bulardan ko'rinadiki, faqat bitta α_k ($\alpha_2 = -16$) manfiy qiymatga ega. Shuning uchun bu erda ham β_k, θ_k, R_k larni v_2 ga mos keluvchi ustun uchun hisoblaymiz:

formadan quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} f(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) &= C_{00}^1 + 2 \sum_{j=m+1}^n C_{0j}^1 x_j + \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n C_{ij}^1 x_i x_j = \\ &= (C_{00}^1 + \sum_{j=m+1}^n C_{0j}^1 x_j) \cdot 1 + \sum_{i=m+1}^n (C_{i0}^1 + \sum_{j=m+1}^n C_{ij}^1 x_j) x_i \end{aligned}$$

yoki bundan

$$\left\{ \begin{aligned} f(X) &= (C_{00}^1 + C_{0m+1}^1 x_{m+1} + \dots + C_{0n}^1 x_n) \cdot 1 + \\ &+ (C_{m+1,0}^1 + C_{m+1,m+1}^1 x_{m+1} + \dots + C_{m+1,n}^1 x_n) x_{m+1} + \\ &+ \dots \dots \dots \\ &C_{i0}^1 + C_{i,m+1}^1 x_{m+1} + \dots + C_{in}^1 x_n) x_i + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ (C_{n0}^1 + C_{nm+1}^1 x_{m+1} + \dots + C_{nn}^1 x_n) x_n, \end{aligned} \right. \quad (9.64)$$

(bu erda barcha i va j lar uchun $C_{ij}^1 = C_{ji}^1$). (9.64) dagi har bir x_j noma'lum oldidagi qavs ichida yozilgan ifoda $f(x)$ funktsiyadan

x_j noma'lum bo'yicha olingan xususiy hosilaning yarmiga teng bo'ladi, ya'ni masalan, $j=1$ da

$$C_{10}^1 = C_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + C_{1n} x_n = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_1} \quad (9.65)$$

Ma'lumki, x_1, x_2, \dots, x_m bazis o'zgaruvchilar uchun

$$\frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

tenglik to'g'ridir. Shuning uchun berilgan masala rejasining optimalligini ko'rsatuvchi Kun-Takker shartlarini qo'yidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} \leq 0, \quad \frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} x_j &= 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{m+1, n} \end{aligned} \quad (9.66)$$

Endi (9.62) da ozod o'zgaruvchilarning nolga tenglab,

$$X^{(0)} = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0) \quad (b_i \geq 0, i = \overline{1, m})$$

bazis yechimni hosil qilamiz. Agar

$$\frac{\partial f(x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_j} \leq 0$$

shart barcha $j = m+1, \dots, n$ uchun o'rinli bo'lsa, topilgan

$$X^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

bazis yechim masalaning yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$\frac{\partial f(x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_j} > 0$$

shartni qanoatlantiruvchi kamida bitta j , masalan, $j = m + 1$ mavjud bo'lsin. U holda x_{m+1} noma'lumning qiymatini orttira borib, $f(x)$ funktsiyani qiymatini orttira borish mumkin, lekin x_{m+1} ning qiymatini cheksiz ravishda orttirish mumkin emas, chunki uning ma'lum qiymatlarida x_1, x_2, \dots, x_m noma'lumlardan birortasi yoki

$$\frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} (j = \overline{m+1, n})$$

ifoda nolga aylanishi mumkin. Bularning qaysi biri birinchi bo'lib nolga aylanishiga bog'liq ravishda x_{m+1} o'zgaruvchi qo'yidagi ikki usul bilan bazisga kiritiladi.

1-usul. x_{m+1} ning qiymati orttirib borilganda x_1, x_2, \dots, x_m noma'lumlardan birortasi, masalan x_k birinchi bo'lib nolga aylansin. Bunda x_k uchun

$$\theta = \min_{\substack{a_{i,m+1} < 0 \\ C_{m+1,m+1} < 0}} \left\{ \frac{b_i}{|a_{i,m+1}|}, \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|} \right\} = \frac{b_k}{|a_{k,m+1}|}$$

o'rinli bo'ladi. U holda

$$x_k = b_k + a_{k,m+1}x_{m+1} + a_{k,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{kn}x_n$$

ifodadan x_{m+1} ni ajratamiz (x_k ning o'rniga x_{m+1} ni bazisga kiritamiz).

Topilgan x_{m+1} ning qiymatini (9.62) sistemaga qo'yamiz. Yuqorida ko'rgan almashtirishlarni bajarib, $f(x_k, x_{m+2}, \dots, x_n)$ funktsiyani (9.64) ko'rinishda ifodalaymiz. Natijada yangi bazis yechim

$$X^{(1)} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_{k-1}, b'_{k+1}, \dots, b'_m, b'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

topiladi.

2-usul. x_{m+1} noma'lumning qiymati orttirib borilganda $\frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_{m+1}}$ ifoda birinchi bo'lib nolga aylansin, ya'ni quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$\theta = \min_{\substack{a_{i,m+1} < 0 \\ C_{m+1,m+1} < 0}} \left(\frac{b_i}{|a_{i,m+1}|}, \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|} \right) = \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|} \quad (9.67)$$

U holda x_{m+1} noma'lumni bazisga kiritish uchun yangi

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_{m+1}} = C_{m+1,0} + C_{m+1,m+1}x_{m+1} + \dots + C_{m+1,n}x_n \quad (9.68)$$

o'zgaruvchi tanlaymiz hamda (9.68) dan x_{m+1} ni ajratib, yangi sistemaning birinchi tenglamasini tuzamiz:

$$x_{m+1} = \frac{C_{m+1,0}}{C_{m+1,m+1}} - \frac{C_{m+1,m+2}}{C_{m+1,m+1}}x_{m+2} - \dots - \frac{C_{m+1,n}}{C_{m+1,m+1}}x_n + \frac{u_1}{C_{m+1,m+1}}.$$

Topilgan noma'lumning qiymati masala shartlari (9.62) ga va maqsad funktsiyaga qo'yamiz va yangi sistema hosil qilamiz. Yangi sistemada $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ o'zgaruvchilar ajratilgan (bog'liq) o'zgaruvchilar bo'lib, u_1, x_{m+2}, \dots, x_n lar esa ozod o'zgaruvchilar bo'ladi. ozod o'zgaruvchilarni nolga tenglab, yangi

$$X^{(1)} = (b_1, b_2, \dots, b_m, b_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

bazis yechimini hosil qilamiz.

k-qadamda masala x_j va u_i noma'lumlarni o'z ichiga olishi mumkin. x_j u_i dan shunisi bilan farq qiladiki, x_j ning ishorasiga chegara qo'yiladi ($x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$) u_i ga esa bunday chegara qo'yilmaydi. Demak, u musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. Bunday o'zgaruvchilar uchun Kun-Takkerning optimallik sharti $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ bo'ladi.

Masalaning bazis yechimida $u_i = 0$ bo'lishi kerak. Agar $u_i \neq 0$ bo'lsa, tegishli tenglama va u_i o'zgaruvchi masala shartlaridan o'chirib tashlanadi.

Algoritmning k-qadamida qo'yidagi ishlar bajariladi:

1. k-1-qadamda topilgan $X^{(k-2)}$ bazis yechim uchun optimallik sharti tekshiriladi. Agar x_j ozod o'zgaruvchilar uchun $\frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0$ bo'lib, yangi kiritilgan barcha u_i o'zgaruvchilar uchun $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ bo'lsa topilgan yechim optimal yechim bo'ladi.

2. Agar optimallik sharti bajarilmasa, u holda $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi kamida bitta u_i aniqlanadi. Bu erda qo'yidagi 3 hol ro'y berishi mumkin:

a) $\frac{\partial f}{\partial u_i} < 0$. Bu holda u_i ning qiymatini kamaytirish kerak. Natijada maqsad funktsiyaning qiymati ortadi.

b) $\frac{\partial f}{\partial u_i} > 0$. Bu holda u_i ning qiymatini orttirish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati ortadi.

v) $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$. Bu holda $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x_t noma'lum tanlanadi. Bu noma'lum yoki bazisga kiritiladi va uning qiymati

$$\theta = \min \left\{ \frac{b_i}{|a_{i,t}|}, \frac{C_{t,0}}{|C_{t,t}|} \right\}$$

formula orqali topiladi, yoki bo'lmasa, masalaning maqsad funktsiyasi yuqoridan chegaralanmagan ekanligi $a_{i,t} > 0, C_{t,t} > 0$, (barcha j lar uchun) aniqlanadi. Agar k-qadamda yangi bazis yechim $X^{(k-1)}$ topilgan bo'lsa, k+1 qadamga o'tiladi. Maqsad funktsiyaning yuqoridan chegaralanmagan ekanligi aniqlangan bo'lsa, masalaning yechish jarayoni to'xtatiladi.

Taqqoslash uchun yuqorida Barankin-Dorfman usuli bilan yechilgan masalani ko'ramiz va uni Bill usuli bilan yechamiz.

Masala. Quyidagi masala yechilsin:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 6, \\
x_j &\geq 0, j = \overline{1,4}, \\
Z = \max &= f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.
\end{aligned}$$

Yechimi. Masala shartidagi birinchi tenglamadan x_3 ni, ikkinchisidan x_4 ni ajratamiz va $f(x)$ maqsad funktsiyani (9.64) ko'rinishda yozamiz. Natijada berilgan masalani qo'yidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 10 - x_1 - 2x_2, \\
x_4 &= 6 - x_1 - x_2 \\
f(X) &= (0 + 5 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2) \cdot 1 + (5 + x_1 + x_2) \cdot x_1 + (0 + x_1 - 2x_2) \cdot x_2
\end{aligned} \tag{9.69}$$

(9.69) dan ko'rish mumkinki,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} &= 5 - x_1 + x_2, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} &= 0 + x_1 - 2x_2,
\end{aligned}$$

Ozod o'zgaruvchilar (x_1, x_2) ga nol qiymat berib, boshlang'ich bazis yechimini aniqlaymiz:

$$X^{(0)} = (0; 0; 10; 6), f(X^{(0)}) = 0$$

Endi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1} = 5 > 0$$

bo'lganligi sababli x_1 noma'lumni bazisga kiritamiz. Buning uchun

$$\theta = \min \left\{ \frac{10}{2}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1} \right\} = 5$$

sonni aniqlaymiz va

$$u_1 = 5 - x_1 + x_2$$

belgilash kiritamiz. (9.70) dan x_1 ni ajratib, bazis o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x_1 = 5 + x_2 - u_1 \tag{9.72}$$

Topilgan x_1 ning qiymatini masalaning shartlari va maqsad funktsiyaga qo'yamiz hamda (9.71) ni (9.69) sistemaga qo'shib yozamiz. Natijada qo'yidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 + x_2 + u_1, \\
x_3 &= 5 - 3x_2 + u_1, \\
x_4 &= 1 - 2x_2 + u_1,
\end{aligned} \tag{9.73}$$

$$f(x_2, u_1) = (25 + 5x_2) \cdot 1 + (5 - x_2) \cdot x_2 + (0 - u_1) \cdot u_1$$

(9.72)-(9.73) masaladagi x_2, u_1 ozod o'zgaruvchilarga nol qiymat berib, yangi bazis yechimni topamiz:

$$X^{(1)} = (5; 0; 5; 1; 0), f(X^{(1)}) = 25.$$

(9.73)dan ko'rinadiki,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f(X^{(1)})}{\partial x_2} = 5 > 0.$$

Demak, bazisga x_2 noma'lumni kiritish kerak.

$$\theta = \min\left\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, 5\right\} = \frac{1}{2}$$

bo'lganligi sababli x_2 ni bazisga kiritib, bazisdan x_4 ni chiqarish kerak. Demak, $x_4 = 1 - 2x_2 + u_1$ tenglamadan x_4 ni x_2 ga almashtiramiz:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}u_1 \quad (9.74)$$

Hosil bo'lgan (9.74) tenglamani yangi sistemaning birinchi tenglamasi deb qaraymiz. So'ngra topilgan x_2 ning qiymatini masalaning shartlari (9.72) ga va maqsad funktsiya (9.73) ga qo'yib, yangi sistemaning qolgan tenglamalari va maqsad funktsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}u_1, \\ x_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}u_1, \\ x_3 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}u_1, \end{cases} \quad (9.75)$$

$$f(x_4, b_1) = \left(\frac{119}{4} - \frac{9}{4}x_4 + \frac{9}{4}u_1\right) \cdot 1 + \left(-\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}u_1\right) \cdot x_4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}u_1\right) \cdot u_1.$$

(9.76)

Yangi bazis yechim. $u_1 = 0$ da

$$\frac{\partial f(X^{(2)})}{\partial u_1} = \frac{9}{4} > 0.$$

Shuning uchun topilgan yechim bazis yechim bo'lmaydi. Demak, bazis yechimni optimallashtirish kerak. Buning uchun u_1 ni bazisga kiritamiz.

$$\theta = \min\left\{\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{5} \text{ bo'lganligi sababli}$$

$$u_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}u_1 \quad (9.77)$$

yangi noma'lumni kiritamiz. (9.77) dan u_1 ni ajratib, yangi sistemaning birinchi tenglamasini tuzamiz:

$$u_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}u_2 \quad (9.78)$$

(9.78)ni (9.75) va (9.76) ga qo'yib topamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{23}{5} - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2, \\ x_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{2}{5}u_2, \end{cases} \quad (9.79)$$

$$x_3 = \frac{13}{5} + \frac{7}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2,$$

$$f(x_4, u_2) = \left(\frac{169}{5} - \frac{9}{5}x_4\right) \cdot 1 + \left(-\frac{9}{5} - \frac{1}{5}x_4\right) \cdot x_4 + \left(-\frac{4}{5}u_2\right) \cdot u_2. \quad (9.80)$$

Yangi bazis yechim ($u_2 = 0$ da):

$$X^{(3)} = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0 \right),$$

$$f(X^{(3)}) = \frac{169}{5}.$$

(9.80)dan ko'rinadiki,

$$\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_4} < 0, \left(\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial u_2} \right)_{u_2=0} = 0, \quad \frac{\partial f(X^{(2)})}{\partial x_4} \cdot x_4 = 0.$$

Demak, $X^{(3)}$ uchun Kun-Takker shartlari bajariladi. Shuning uchun bu yechim optimal yechim bo'ladi. Shunday qilib, masalaning optimal yechimi:

$$X^* = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0 \right),$$

$$f(X^*) = \frac{169}{5}.$$

Bu yechimni Barankin-Dorfman usuli bo'yicha topilgan yechim bilan solishtirib, ularning bir xil ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Tayanch so'z va iboralar

Kvadratik dasturlash, kvadratik forma, musbat aniqlangan kvadratik forma, manfiy aniqlangan kvadratik forma, nomusbat aniqlangan kvadratik forma, nomanfiy aniqlangan kvadratik forma, aniqmas kvadratik forma; kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma, Kun-Takker shartlari

Nazorat savollari

1. Kvadratik dasturlash masalasi qanday qo'yiladi va u chiziqli dasturlash masalasidan nima bilan farq qiladi?
2. Kvadratik forma deganda nimani tushunasiz?
3. Kvadratik funktsiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishligi nimaga bog'liq bo'ladi?
4. Qanday kvadratik forma manfiy (musbat) aniqlangan kvadratik forma deyiladi?
5. Aniqmas kvadratik forma qanday bo'ladi?
6. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi qanday bo'ladi?
7. Nomanfiy (nomusbat) kvadratik forma Evklid fazosida qanday funktsiyani ifodalaydi?
8. Kvadratik dasturlash masalasi uchun Kun-Takker shartlari qanday yoziladi?
9. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Barankin-Darfman usulining g'oyasi nima?
10. Bil usulining algoritmi qanday?

MASALALAR.

1. Masalani 3-§ da izohlangan simpleks usuli bo'yicha yeching.

$$x_1 + 4x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z_{\max} = f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2.$$

2. Masalani Barankin-Dorfman usuli bilan yeching.

$$x_1 + 3x_2 \geq 5,$$

$$2x_1 + 0.5x_2 \geq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z_{\min} = 4x_1^2 + 3x_2^2.$$

3. Masalani Bil usuli bo'yicha yeching.

$$x_1 + 3x_2 \leq 9,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z_{\max} = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2..$$

4. Masalani grafik usulda, Barankin-Dorfman usuli bo'yicha yechib, yechimlarini solishtiring.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$Z_{\max} = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2.$$

X BOB. GRADIENT USULLAR

Chiziqli dasturlash masalalarini, jumladan, qavapiq dasturlash va kvadratik dasturlash masalalarini yechish uchun yuqorida ko'rilgan (VIII, IX boblar) usullarning asosini simpleks usul tashkil etadi, ya'ni optimal yechim rejalaridan tashkil topgan to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidiriladi. Lekin bu usul chekli imkoniyatga ega bo'lganligi uchun uni cheklamalari va maqsad funktsiyasi murakkab shaklda bo'lgan masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday masalalarning optimal yechimini topishda maqsad funktsiyasining **gradienti** tushunchasiga asoslangan va **gradient usullar** deb ataluvchi usullar keng qo'llaniladi. Bu usullar yordamida masalaning maqsad funktsiyasiga maksimal (minimal) qiymat beruvchi nuqtaga gradient yo'nalishi bo'yicha harakat qilib yaqinlashib boriladi va har bir qadamda funktsiyaning maksimal o'sib (kamayib) borishi ta'minlanadi. Gradient usullar yordamida har qanday chiziqli bo'lmagan dasturlash masalasini yechish mumkin. Lekin, umumiy holda, bu usullar masalaning faqat mahalliy optimumini beradi. Faqat rejalaridan tashkil topgan G to'plam qavapiq bo'lib maqsad funktsiyasi qavapiq yoki botiq bo'lgan masalalardagina gradient usul yordamida global (absolyut) optimumni topish mumkin. Shuning uchun bu usullarni qavapiq va kvadratik dasturlash masalalarini yechishga qo'llash maqsadga muvofiqdir. Lekin shuni qayd etib o'tish kerakki, gradient usul bo'yicha optimal nuqtaga juda sekinlik bilan yaqinlashish mumkin. Faqat ayrim xususiy hollardagina, masalan, bu usulni chiziqli dasturlash masalalariga qo'llaganda optimal yechimga chekli sondagi iteratsiya yordamida erishish mumkin.

Darslikning ushbu bobida kvadratik va qavapiq dasturlash masalalariga gradient usulni qo'llash va unga doir ba'zi qo'shimcha tushunchalar va masalalar bilan tanishamiz.

1 - §. Funktsiya gradienti tushunchasi

n o'lchovli Evklid fazosi E_p ning biror sohasida o'zlarining birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lgan funktsiyalar to'plamini S' bilan belgilaymiz.

n o'lchovli $f \in S'$ funktsiyaning gradient proektsiyalari $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ lardan

iborat bo'lgan vektor ustun bo'lib, $\text{grad } f$ yoki ∇f simvollar opqali belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$\text{grad } f = \nabla f = (\partial f / \partial x_1) \bar{e}_1 + (\partial f / \partial x_2) \bar{e}_2 + \dots + (\partial f / \partial x_n) \bar{e}_n$, bu erda $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n$ ortlar, ∇f simvol "nabla f" deb o'qiladi.

Gradientni koordinata o'qlariga proektsiyalari opqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\text{grad } f = \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)',$$

$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning berilgan X^0 nuqtadagi gradienti

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)$$

ko'rinishda yoziladi.

Berilgan X^0 nuqtada $f(X)$ funktsiyadan gradient yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng katta qiymatga erishadi va

$$|\nabla f(X^0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)^2}$$

ga teng bo'ladi. Demak, bundan gradient yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng tez o'sish yo'nalishidir degan xulosaga kelish mumkin.

$f(X)$ funktsiyaning X^0 nuqtadagi gradienti $\nabla f(X^0)$ nuqtadan o'tuvchi yuksaklik sirti ($f(X)=\text{const}$) ga perpendikulyar bo'ladi.

$$-\nabla f(X^0) = \left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)'$$

vektor $f(X)$ funktsiyaning X^0 nuqtadagi tezlik bilan kamayish yo'nalishini ko'rsatadi va uning X^0 nuqtadagi **antigradienti** deb ataladi.

Agar $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta $f(X)$ funktsiyaning statsionar nuqtasi bo'lsa $\nabla f(X) = 0$ tenglik bajariladi.

Yuqorida $f(X)$ funktsiyaning berilgan X^0 nuqtada gradient yo'nalishi bo'yicha olingan hosilasi haqida gapirdik. Buni tasavvur qilish uchun n o'zgaruvchili $f(X) \in C'$ funktsiyadan ixtiyoriy $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ yo'nalish bo'yicha olingan hosila tushunchasini kiritamiz.

Berilgan X^0 nuqtada $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C'$ funktsiyadan $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ($\|S\|=1$) yo'nalishi bo'yicha olingan hosila quyidagi limit orqali aniqlanadi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda}, \quad \|S\|=1.$$

Agar $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \quad (j = \overline{1, n})$ hosilalar mavjud bo'lsa, u holda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ hosilani quyidagi formula yordamida topish mumkin:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} s_2 + \dots + \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} s_n, \quad (10.1)$$

$$s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2 = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos^2 x_n = 1.$$

Agar $f(X)$ funktsiya X^0 nuqtada differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsa, ixtiyoriy S ($\|S\|=1$) uchun $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ mavjud bo'ladi hamda

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0), S)$$

o'rinli bo'ladi. Xaqiqatdan ham ixtiyoriy kichik $\lambda > 0$ uchun

$$f(X^0 + \lambda S) - f(X^0) = (\nabla f(X^0), (X^0 + \lambda S - X^0)) + o(\|X^0 + \lambda S - X^0\|).$$

Bundan $f(X^0 + \lambda S) = f(X^0) + \lambda(\nabla f(X^0), S) + o(\|\lambda S\|)$ va

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\lambda(\nabla f(X^0), S) + o(\|\lambda S\|)}{\lambda} = (\nabla f(X^0), S).$$

Ma'lumki, $(\nabla f(X^0), S) = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0), S)$.

$$\text{Demak, } \frac{\mathcal{J}(X^0)}{\mathcal{S}} = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0), S).$$

Bundan ko'rinadiki, $f(X)$ funktsiyadan X^0 nuqtada S yo'nalish bo'yicha olingan hosila $\cos(\nabla f(X^0), S) = 1$ bo'lganda maksimal qiymatga erishadi. Demak, S yo'nalish X^0 nuqtadagi $f(X)$ funktsiyaning $\nabla f(X^0)$ gradienti yo'nalishi bilan bir xil bo'lganda $\frac{\mathcal{J}(X^0)}{\mathcal{S}}$ maksimal qiymatga erishadi. Shuning uchun ham gradient bo'ylab yo'nalish $f(X)$ funktsiyaning X^0 nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi. Xuddi shuningdek, antigradient bo'ylab yo'nalish $f(X)$ funktsiyaning X^0 nuqtadagi eng tez kamayish yo'nalishi bo'lishini ko'rsatish mumkin.

1 - misol. $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2$ funktsiyadan $X^0 = (3; 4)$ nuqtada $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ($\|S\|=1$) yo'nalishi bo'yicha olingan hosila topilsin.

Yechish. Eng avval $\frac{\mathcal{J}(X^0)}{\partial x_j}$ ($j=1,2$) qiymatlarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(3;4)} &= 2x_1 \Big|_{(3;4)} = 6; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(3;4)} &= 4x_2 \Big|_{(3;4)} = 16. \end{aligned}$$

So'ngra (10.1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 16 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{22}{\sqrt{2}}.$$

Bu natijani (10.2) ga asosan ham topish mumkin:

$$\frac{\mathcal{J}(X^0)}{\mathcal{S}} = (\nabla f(X^0), S) = (6, 16) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{22}{\sqrt{2}}.$$

2 - misol. $f(X) = 3x_1^2 + 2x_2^2$ funktsiyaning $X^0 = (1; 2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi aniqlansin.

Yechish. Ma'lumki, $f(X)$ funktsiyaning X^0 nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi: $S = \nabla f(X^0)$.

Demak,

$$S = \left(\frac{\mathcal{J}(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\mathcal{J}(X^0)}{\partial x_2} \right)' = (6; 8)'$$

Javob. $S = (6, 8)'$ yo'nalishi berilgan $f(X)$ funktsiyaning $X^0 = (1; 2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi.

3 - misol. $f(X) = 3x_1^2 + 2x_2^2$ funktsiyaning $X^0 = (3; 4)$ nuqtadagi $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \leq 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha S yo'nalishlar topilsin.

Yechish. $S = (X - X^0) = (x_1 - 3; x_2 - 4)$.

Shartga ko'ra $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \leq 0$, demak

$$(\nabla f(X^0), S) \leq 0,$$

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right)' = (6; 16)'.$$

Demak,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = ((6; 16)', (x_1 - 3; x_2 - 4)) \leq 0.$$

Bundan

$$6(x_1 - 3) + 16(x_2 - 4) \leq 0,$$

yoki

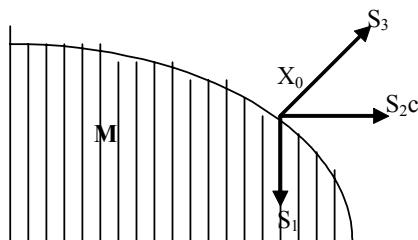
$$3x_1 + 8x_2 - 41 \leq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday nuqtalar to'plami $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \leq 0$ qanoatlantiruvchi yo'nalishlarni aniqlaydi.

2 - §. Mumkin bo'lgan yo'nalishlar

1 - ta'rif. Shunday $\bar{\lambda}$ son mavjud bo'lib, har qanday $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ uchun $X^0 + \lambda S \in M$ o'rinli bo'lsa, $X^0 \in M$ nuqtadan boshlanadigan yo'nalish **mumkin bo'lgan yo'nalish** deb ataladi.

Shunday qilib, mumkin bo'lgan yo'nalishni quyidagicha izohlash mumkin. Agar S mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lsa, bu yo'nalish bo'yicha X^0 nuqtadan boshlab λS masofaga siljish natijasida topiladigan $X^0 + \lambda S$ nuqta ham M to'plamga tegishli bo'ladi. Shaklda ko'rsatilgan S_1 mumkin bo'lgan yo'nalish, S_2, S_3 mumkin bo'lgan yo'nalish emas (10.1 - shakl). Agar X^0 M to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, undan boshlanadigan ixtiyoriy yo'nalishlar **mumkin bo'lgan yo'nalishlar** bo'ladi.



10.1 шакл

1 - teorema. Agar M to'plam

$$g_i(X) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

tengsizliklar orqali aniqlangan to'plam bo'lib, $X^0 \in M$ va $g_i(X^0)=0$ shartni bajaruvchi i indekslar to'plami $I(X^0)$ bo'lsa, u holda

$$(\nabla g_i(X^0), S) + \varepsilon \leq 0, \quad (i \in I(X^0)) \quad (10.2)$$

tengsizliklar sistemasini ba'zi $\varepsilon > 0$ da qanoatlantiruvchi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'ladi.

Isboti. Bu erda ikki holni ko'ramiz:

a) $i \notin I(X^0)$. Bu holda $g_i(X^0) < 0$.

X^0 nuqtadan ixtiyoriy S yo'nalish bo'yicha etarli darajada qisqa $\varepsilon > 0$ masofaga siljish natijasida bu tengsizlik buzilmaydi. Demak, S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'ladi.

b) $i \in I(X^0)$. Bu holda S (10.2) shartni qanoatlantirib, mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lmasin deylik. U holda ixtiyoriy $\lambda > 0$ uchun

$$g_i(X^0 + \lambda S) > 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$g_i(X^0) = 0, \quad i \in I(X^0)$$

bo'lgani uchun, ixtiyoriy $\lambda > 0$ da

$$\frac{1}{\lambda} (g_i(X^0 + \lambda S) - g_i(X^0)) > 0 \quad (i \in I(X^0))$$

va

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{g_i(X^0 + \lambda S) - g_i(X^0)}{\lambda} = (\nabla g_i(X^0), S) \geq 0 \text{ bo'ladi.}$$

Bu esa (10.2) shartga zid natijadir. Demak, S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'ladi.

2- teorema. Agar $X^0 \in M$ nuqtadagi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lsa, u holda hap qanday $i \in I(X^0)$ uchun

$$(\nabla g_i(X^0), S) \leq 0 \quad (10.3)$$

tengsizlik o'rinlidir.

Isboti. Teoremani teskari mulohaza qilish yo'li bilan isbot qilamiz. Faraz qilaylik, S mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lib, shunday $i \in I(X^0)$ mavjud bo'lsinki, unda

$$(\nabla g_i(X^0), S) > 0$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy kichik λ son uchun

$$g_i(X^0 + \lambda S) - g_i(X^0) = (\nabla g_i(X^0), \lambda S) + o(\lambda) = \lambda (\nabla g_i(X^0), S) + o(\lambda) > 0$$

Bundan $g_i(X^0) = 0$ ($i \in I(X^0)$) bo'lganligi sababli:

$$g_i(X^0 + \lambda S) > 0 \quad (i \in I(X^0)).$$

Bu tengsizlik esa S yo'nalishning mumkin bo'lgan yo'nalish emasligini ko'rsatadi. Bu esa teorema shartiga zid. Demak S yo'nalish mumkin bo'lgan

yo'nalish bo'lishligi uchun (10.3) shartning bajarilishi zarur ekan.

3 - teorema. Agar M to'plam

$$g_i(X) = a_i X - b_i \leq 0, (i = \overline{1, m}) \quad (10.4)$$

tengsizliklar sistemasi orqali aniqlangan to'plam bo'lib,

$$g_i(X^0) = 0, X^0 \in M$$

shartlarni qanoatlantiruvchi i indekslar to'plami $I(X^0)$ bo'lsa, u holda S yo'nalish X^0 nuqtadagi mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lishi uchun har qanday $i \in I(X^0)$ da

$$(a_i, S) \leq 0 \quad (10.5)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik, X^0 nuqtadan chiquvchi S yo'nalishi mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lsin. U holda ixtiyoriy kichik $\lambda > 0$ son uchun

$$g_i(X^0 + \lambda S) = a_i(X^0 + \lambda S) - b_i \leq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$a_i X^0 + \lambda(a_i, S) - b_i \leq 0,$$

yoki

$$(a_i X^0 - b_i) + \lambda(a_i, S) \leq 0.$$

Bunda $a_i X^0 - b_i = 0$ ($i \in I(X^0)$) bo'lgani uchun

$$\lambda(a_i, S) \leq 0$$

Tengsizlik va $\lambda > 0$ ga asosan

$$(a_i, S) \leq 0, (i \in I(X^0)).$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik, ixtiyoriy i uchun $(a_i, S) \leq 0$ bajarilsin. U holda ikki holni ko'rish mumkin:

1) $i \notin I(X^0)$. Bu holda $a_i X^0 - b_i < 0$ va X^0 nuqtadan ixtiyoriy S yo'nalishda yetarli darajada qisqa masofaga siljish natijasida bu tengsizlik buzilmasligi mumkin.

2) $i \in I(X^0)$. Bu holda ixtiyoriy kichik $\lambda > 0$ son uchun

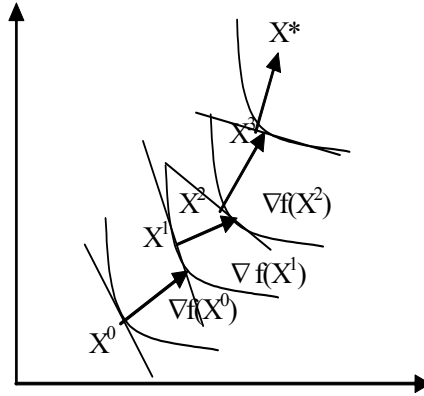
$$g_i(X^0 + \lambda S) = a_i(X^0 + \lambda S) - b_i = (a_i X^0 - b_i) + \lambda(a_i, S) \leq 0. \quad (10.6)$$

Shartga ko'ra $a_i X^0 - b_i = 0$ va $(a_i, S) \leq 0$. Bundan (10.6) tengsizlik ixtiyoriy kichik $\lambda > 0$ sonida S yo'nalishning X^0 nuqtadagi mumkin bo'lgan yo'nalish ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

3 - §. Funktsiyaning shartsiz ekstremumini gradient usullar bilan aniqlash

Faraz qilaylik, differentsiallanuvchi chiziqsiz funktsiyaning shartsiz ekstremumini topish masalasi qo'yilgan bo'lib, X^* nuqta $f(X)$ funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqta bo'lsin.

Gradient usul bilan ana shu ekstremum X^* nuqtani qidipish masalasi quyidagicha hal qilinadi: ixtiyoriy X^0 nuqta olinadi va bu nuqtada topilgan $\nabla f(X^0)$ gradient yordamida $f(X)$ funktsiyaning maksimum tezlik bilan o'sish yo'nalishi aniqlanadi (10.2 shakl). Bu yo'nalish bo'yicha ma'lum bir λ_1 qadamga siljib X^1 nuqtaga o'tiladi. So'ngra $\nabla f(X^1)$



10.2 – shakl

gradientni hisoblab X^1 nuqtadan boshlab $f(X)$ funktsiyaning maksimal tezlik bilan o'sish yo'nalishi aniqlanadi. Bu yo'nalish bo'yicha X^1 nuqtadan λ_2 masofaga siljish natijasida X^2 nuqtaga o'tiladi va hokazo. Ana shunday yo'l bilan jarayon X^* nuqta topilguncha takrorlanadi.

Shaklda X^* nuqtani qidipish traektoriyasi ko'rsatilgan bo'lib, u shunday $X^0, X^1, X^2, \dots, X^k \dots$ ketma-ketlikdan iboratki, unda

$$f(X^0) < f(X^1) < \dots < f(X^k) < \dots \quad (10.7)$$

o'rinli bo'ladi. Bunda X^k nuqtadan X^{k+1} nuqtaga o'tish uchun

$$X = X^k + \lambda \nabla f(X^k) \quad (10.8)$$

to'g'ri chiziq bo'ylab λ qadamga siljish kerak. λ sonning qiymati $\lambda = \lambda_k$ aniqlanganda

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k \nabla f(X^k)$$

nuqta topilgan bo'ladi.

Gradientga asoslangan ko'p usullari bir-biridan asosan $\lambda = \lambda_k$ ni tanlash usullari bilan farq qiladi. Masalan, bir nuqtadan ikkinchisiga o'tishda har doim bir xil masofaga ko'chib borish mumkin, ya'ni ixtiyoriy k da

$$X^{k+1} = X^k + \lambda \nabla f(X^k).$$

Agar X^{k+1} nuqtada $f(X)$ funktsiyaning o'sishi ta'minlanmasa, yana qaytadan X^k nuqtaga qaytib, λ ning qiymati (macalan, $\lambda/2$) kamaytiriladi. Ba'zan λ_k ni $|\nabla f(X^k)|$ ga proporsional qilib tanlab olinadi.

Optimal nuqtani qidipish jarayonining har bir qadamida $f(X)$ funktsiyaning o'zgarishi (o'sishi) tekshirilib boriladi. Agar k qadamdan so'ng $f(X)$ funktsiyaning o'sish miqdori oldindan berilgan kichik $\delta > 0$ sonidan ortmasa, nuqtani qidirish jarayoni tugatiladi va $f(X)$ funktsiyaning erishgan $f(X^k)$ qiymati uning optimal qiymati va X^k nuqtani esa optimal X^* nuqta deb qabul qilinadi.

Agar $f(X)$ funktsiya qavariq yoki botiq funktsiya bo'lsa, X^* nuqtaning ekstremum nuqta ekanligining zaruriy va etarlilik sharti

$$\nabla f(X^*) = 0 \quad (10.9)$$

bo'ladi.

Yuqorida izohlangan usul funktsiyaning shartsiz ekstremumini topishda eng ko'p qo'llaniladigan gradient usullardan biri bo'lib, u funktsiya qiymatini tezlik bilan ko'tarish (agar X^k nuqtadan X^{k+1} ga $\nabla f(X^k)$ gradient yo'nalishi bo'yicha siljish natijasida o'tilsa) yoki funktsiya qiymatini tezlik bilan pasaytirish usuli (agar X^k nuqtadan X^{k+1} ga antigradient $(-\nabla f(X^k))$ yonalish bo'yicha siljish natijasida o'tilsa) deb ataladi.

Tezlik bilan ko'tarish usuli bo'yicha X^k nuqtadagi $\nabla f(X^k)$ gradient topilgandan so'ng

$$X = X^k + \lambda \nabla f(X^k)$$

to'g'ri chiziq bo'ylab siljib borib, shu yunalishda $f(X)$ funktsiyaga eng katta qiymat beruvchi X^{k+1} nuqta topiladi. Co'ngpa bu nuqtadagi $\nabla f(X^{k+1})$ gradient hisoblanadi va

$$X = X^{k+1} + \lambda_{k+1} \nabla f(X^{k+1})$$

to'g'ri chiziq bo'ylab siljib borib, ushbu yunalishda $f(X)$ funktsiyaga eng katta qiymat beruvchi X^{k+2} nuqta topiladi va h.k. Bu jarayon $f(X)$ funktsiyaga eng katta (maksimal) qiymat beruvchi X^* nuqta topilgunga qadar davom ettiriladi. Har bir X^k nuqtadan $X^{k+1} = X^k + \lambda_k \nabla f(X^k)$ nuqtaga o'tish natijasida $f(X)$ funktsiyaning qiymati

$$\Delta f(X^k) = f(X^{k+1}) - f(X^k) = f(X^k + \lambda_k \nabla f(X^k)) - f(X^k)$$

ya'ni

$$\Delta f(X^k) = \left(x_1^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}, x_2^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}, \dots, x_n^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n} \right) - f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \quad (10.10)$$

miqdorga o'zgaradi.

(10.10) dan ko'rinadiki, funktsiyaning Δf opttimaci λ_k ning funktsiyasidan iborat. Shuning uchun $f(X)$ funktsiyaning $\nabla f(X^k)$ yo'nalishdagi maksimal qiymatini topish uchun $\Delta f(\lambda_k)$ funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi λ_k sonni topish macalacini yechish kerak. Boshqacha aytganda $\nabla f(X^k)$ yo'nalish bo'yicha shunday λ_k masofaga siljish kerakki, natijada $\Delta f(\lambda_k)$ funktsiya maksimumga erishsin. λ_k ning qiymati quyidagi tenglamani yechish natijasida topiladi:

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = 0. \quad (10.11)$$

(10.10) ni λ_k bo'yicha differentsiallaymiz:

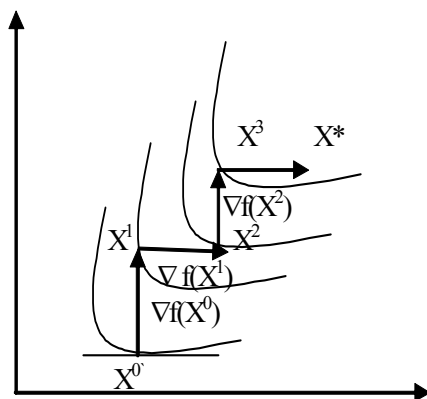
$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = \frac{\partial f(X^{k+1})}{\partial x_1} \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f(X^{k+1})}{\partial x_n} \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_n} = (\nabla f(X^{k+1}), \nabla f(X^k)). \quad (10.12)$$

Bunda (10.11) ga asosan

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = (\nabla f(X^{k+1}), \nabla f(X^k)) = 0 \quad (10.13)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (10.13) ifoda X^k va X^{k+1} nuqtalardagi gradientni o'zaro optogonal bo'lishi kerakligini ko'rsatadi

(10.3-shakl).



10.3- shakl.

4-§. Qavariq dasturlash masalasini yechish uchun gradient usullar. Tezlik bilan ko'tarilish usuli

Faraz qilaylik, chiziqsiz dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq b_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (10.14)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10.15)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow \max. \quad (10.16)$$

Bu erda (10.14)-(10.16) shartlarni qanoatlantiruvchi G to'plam qavariq to'plam va $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ botiq funktsiya bo'lgan holni ko'ramiz. Bundan tashqari $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar uzluksiz, differentsiallanuvchi bo'lib, G to'plamning ichki nuqtalari mavjud deb faraz qilamiz.

Gradient usul yordamida $f(X)$ funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi $X^* \in G$ nuqtani topish jarayoni bilan tanishamiz. Masalani yechish ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtadan boshlanadi. Iterativ jarayon natijasida X^k nuqtadan X^{k+1} nuqtaga o'tish uchun X^k nuqtadan boshlanuvchi shunday s_k mumkin bo'lgan yo'nalishni aniqlaymizki, ixtiyoriy kichik $\lambda_k > 0$ son uchun $X^k + \lambda_k s_k$ nur G to'plamga tegishli bo'lsin. Bunda λ_k son X^k nuqtadan s_k yo'nalish bo'yicha siljish masofasidan iborat. Uni aniqlash uchun turli usullar mavjud. Masalan, λ_k ni quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\lambda_k = \min(\lambda', \lambda''),$$

bu erda λ' son $X^k + \lambda_k s_k$ nur bilan G to'plamning kesishgan nuqtaciga mos keluvchi λ_k ning qiymati, λ'' esa funktsiyaning $X^k + \lambda_k s_k$ nurdagi maksimumiga mos keluvchi λ_k ning qiymati. Agar $\lambda_k \rightarrow \infty$ bo'lsa, berilgan masalaning maqsad funktsiyasi (10.16) yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Aks holda, navbatdagi, ya'ni $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ nuqtaga o'tiladi.

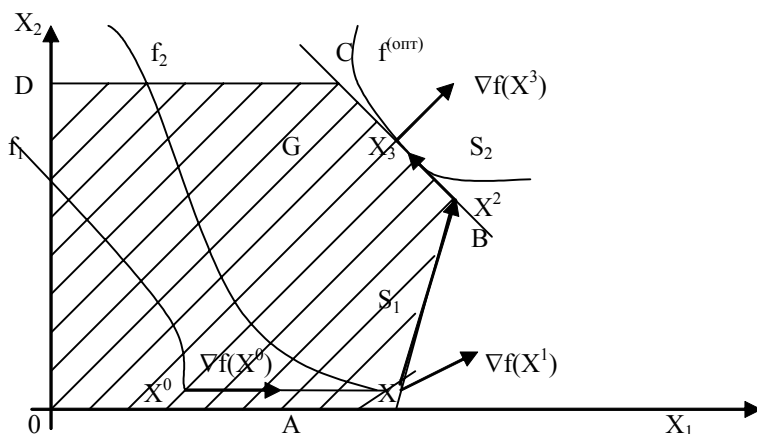
Mavjud gradient usullar bir-biridan s_k yo'nalishni va λ_k parametrni tanlash usullari bilan farq qiladi. Masalan, optimal echim tomon tezlik bilan ko'tarilish

usulida $X^k \in G$ nuqtadan $X^{k+1} \in G$ ga s_k yo'nalish bo'yicha siljish natijasida o'tilganda $Z=f(X)$ funktsiya qiymati $\Delta Z = \lambda_k s_k$ miqdorga o'zgaradi (ortadi), s_k yo'nalishni shunday tanlash kerakki, bu yo'nalishdagi ΔZ ning qiymati maksimum bo'lsin. Ma'lumki (2-§), agar $X^k \in G$ to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, bu nuqtadan boshlanuvchi va berilgan $f(X)$ funktsiyaning maksimal o'sishini ta'minlovchi s_k yo'nalish $\nabla f(X^k)$ gradient yo'nalishidan iborat bo'ladi, ya'ni $s_k = \nabla f(X^k)$, $X^k \in G$ (ichki nuqta). Demak, bu holda X^k nuqtadan $\nabla f(X^k)$ gradient bo'ylab λ_k masofaga siljish natijasida $f(X)$ funktsiyaga ushbu yo'nalishdagi eng katta qiymat beruvchi $X^{k+1} \in G$ nuqtaga o'tiladi:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k.$$

X^k nuqta G to'plamning chegaraviy nuqtasi bo'lib, $\nabla f(X^k)$ gradient shu to'plamdan tashqariga yo'nalgan holda navbatdagi $X^{k+1} \in G$ nuqtaga $\nabla f(X^k)$ gradient yo'nalishi bo'ylab siljish natijasida erishish mumkin emas, chunki bu yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lmasligi mumkin. Bu holda $f(X)$ funktsiyaning maksimal o'sishini hamda $X^k + \lambda_k s_k$ nurning G to'plamga tegishli bo'lishini ta'minlovchi s_k yo'nalishni aniqlash kerak bo'ladi.

Agar topilgan $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ nuqtada $f(X)$ funktsiya maksimumga erishsa, optimal yechim qidirish jarayon to'xtatiladi, aks holda X^{k+1} nuqtaga boshlang'ich nuqta deb qarab, yuqorida qayd qilingan jarayon yana qaytadan takrorlanadi. Umuman, bu jarayon masalaning optimal yechimi X^* topilguncha yoki maqsad funktsiyaning chekli maksimumga ega emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.



10.4 - shakl.

Qavapiq dasturlash masalasini gradient usul bilan yechish jarayonni yuqoridagi 10.4-shakl yordamida ko'rsatamiz. Bunda cheklamalari chiziqli bo'lib, maqsad funktsiya botiq bo'lgan masala tasvirlangan. Shaklda G to'plam qavapiq to'plamdan ($OABCD$ ko'pburchakdan) iborat va $X^0 \in G$ ichki nuqta. Bu nuqtadan $\nabla f(X^0)$ gradient bo'ylab yo'nalib X^1 nuqtaga o'tamiz. Navbatdagi nuqtaga $\nabla f(X^1)$ gradient yo'nalish bo'yicha o'tish mumkin emas, chunki G to'plamdan tashqapiga chiqib ketish mumkin. Shuning uchun shunday yo'nalishni aniqlash kerakki, u $X^1 + \lambda_1 s_1$ nurni G to'plamdan tashqapiga chiqib ketmasligini va $f(X)$ funktsiyaning maksimal o'sishini ta'minlasin. Bu yo'nalish $\nabla f(X^1)$ gradient bilan eng kichik burchak tashkil qiluvchi s_1

vektorni aniqlaydi.

Analitik nuqtai nazardan bunday vektor $\nabla f(X^1)$ va s_1 vektorlarning skalyar ko'paytmasini maksimum bo'lishlik shartidan topiladi:

$$\text{tax}(\nabla f(X^1), s_1) > 0.$$

Shaklda s_1 vektor G to'plamning chegarasi (AB) bilan ustma-ust tushadi. Keyingi qadamlarda chegaraviy to'g'ri chiziq AB bo'ylab $f(X)$ funktsiya eng katta qiymatga erishguncha siljib boriladi.

Shaklda ko'rinadiki, V nuqtada (uni X^2 bilan belgilaymiz) $f(X)$ funktsiya s_1 yo'nalishdagi hap qanday nuqtalarga nisbatan eng katta qiymatga erishdi. Bu nuqtadan navbatdagi nuqtaga o'tish uchun $\nabla f(X^2)$ gradient bo'ylab yo'nalish mumkin emas, chunki bu holda G to'plamdan chetga chiqib ketish mumkin. Shuning uchun

$$\max(\nabla f(X^2), s_2) > 0$$

shartni qanoatlantiruvchi s_2 yo'nalish topiladi. Bu yo'nalish G to'plamning chegarasi BC bilan ustma-ust tushadi. Shakldan ko'rinadiki, X^3 nuqtada $f(X)$ funktsiya s_2 yo'nalishdagi eng katta qiymatga erishdi. Bundan tashqari X^3 nuqta $f(X)$ funktsiyaga G to'plamda eng katta (optimal) qiymat beruvchi nuqtadip, chunki bu nuqtadan $\nabla f(X^3)$ gradient shu nuqtadan chiquvchi va G to'plamda o'tuvchi ixtiyoriy vektor bilan o'tmas burchak, chegaraviy chiziq BC bilan ustma-ust tushgan s_z vektor bilan esa 90° li burchak tashkil qiladi. Shuning uchun

$$(\nabla f(X^3), s_3) = 0 \quad (10.17)$$

tenglik bajariladi. Bu tenglik X^3 nuqtada $f(X)$ funktsiyaning maksimumga erishganligini ko'rsatadi. Shunday qilib X^3 nuqtada $f(X)$ funktsiya optimal qiymatga erishadi, X^3 nuqtaning koordinatalari esa berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaydi.

Endi qavapiq dasturlash masalasi (10.14)-(10.16) ni gradient usul bilan yechish jarayonini analitik ravishda tasvirlaymiz. Faraz qilamiz, optimal yechimni qidirish jarayoni G to'plamning ichki X^0 nuqtasidan boshlansin. U holda $X^* \in G$ optimal yechimga, yuqorida ko'rsatilgandek, gradient bo'ylab yo'nalib borib erishish mumkin. Lekin bunda

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k \nabla f(X^k)$$

nurni aniqlovchi λ_k ni tanlash shu bilan qiyinlashadiki, undagi $X^{k+1} \in G$ bo'lib, $f(X^{k+1})$ miqdor $f(X)$ funktsiyaning $\nabla f(X^k)$ yo'nalishdagi eng katta qiymatidan iborat bo'lishi kerak. Demak, X^{k+1} nuqtaning koordinatalari (10.14)-(10.15) shartlarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} g_i(X^k + \lambda_k \nabla f(X^k)) \leq b_i, & i = \overline{1, m}, \\ X^k + \lambda_k \nabla f(X^k) \geq 0. \end{cases} \quad (10.18)$$

Bu sistemani yechish natijasida λ_k ning shunday mumkin bo'lgan qiymatlar oralig'i $[\lambda'_k, \lambda''_k]$ aniqlanadiki, undagi hap bir $\lambda_k \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ uchun $X^{k+1} \in G$ bo'ladi. Topilgan oralikdagi λ_k lar orasida qo'yilgan shartlarni qanoatlantiruvchi λ_k^* ni topish

uchun quydagi tenglamani yechamiz:

$$(\nabla f(X^k + \lambda_k^* \nabla f(X^k)), \nabla f(x^k)) = 0. \quad (10.19)$$

Bu tenglamaning $\lambda_k^* \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ yechimida $X^{k+1} \in G$ hamda $f(X^{k+1})$ miqdor $f(X)$ funktsiyaning $\nabla f(X^k)$ yo'nalishdagi eng katta qiymatdan iborat bo'ladi.

Agar $\lambda_k^* \notin [\lambda'_k, \lambda''_k]$ bo'lsa, $\lambda_k^* = \lambda''_k$ deb qabyl qilinadi.

Bunday λ_k^* ga mos keluvchi X^{k+1} nuqta G to'plamning chegarasida yotadi.

Agar optimal qidipishni G to'plamning chegaraviy X^k nuqtasidan boshlasak yoki, agar qidipish traektoriyasining navbatdagi nuqtasi G to'plamning chegarasida yotsa, optimal qidipishni davom ettirish uchun shunday s_k yo'nalishni aniqlash kerakki, u birinchidan, ushbu nuqtadagi $\nabla f(X^k)$ gradient yunalishdan fapqli bo'lishi kerak, ikkinchidan, bu yo'nalish bo'yicha λ_k masofaga siljish natijasida erishilgan X^{k+1} nuqta G to'plamga tegishli bo'lishi kerak. Ana shu shartlarni qanoatlantiruvchi s_k yo'nalish quyidagi matematik dasturlash masalasini yechish orqali topiladi:

$$g_i(s_k) \leq 0, \quad i \in I, \quad (10.20)$$

$$T_k = (\nabla f(X^k), s_k) \rightarrow \max, \quad (10.21)$$

buerda I quyidagi shartlar o'rinli bo'lgan i indekslar to'plami:

$$g_i(X^k) = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$|s_k| = 1, \quad s_k = (s_{k1}, \dots, s_{kn}) \quad (10.22)$$

$$|s_k| = \sqrt{s_{k1}^2 + s_{k2}^2 + \dots + s_{kn}^2}. \quad (10.23)$$

(10.20)-(10.23) masalani yechish natijasida $\nabla f(X^k)$ vektor bilan eng kichik o'tkir burchak tashkil qiluvchi s_k vektor aniqlanadi. Bunda (10.22) shart X^k nuqtaning chegaraviy nuqta ekanligini ko'rsatadi. (10.20) shart esa X^k nuqtadan boshlanadigan s_k yo'nalishi G to'plamning ichkarisida yoki uning chegarasi bo'ylab bajarilishi kerakligini ko'rsatadi. (10.23) shart normallashtirish sharti bo'lib, u s_k vektorning uzunligiga qo'yilgan chegaradan iborat. Bu shart qo'yilmaganda (10.21) funktsiyani cheksiz ravishda orttirish mumkin. Adabiyotda turli normallashtirish shartlari mavjud. Ularning turlariga qapab (10.20) - (10.23) masala chiziqli yoki chiziqciz dasturlash masalasi bo'lishi mumkin.

S_k vektor topilgach, X^{k+1} nuqtani aniqlovchi $\lambda_k^* \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ ni topamiz. Buning uchun

$$(\nabla f(X^{k+1}), s_k) = 0 \quad (10.24)$$

shartdan foydalanamiz.

Optimal qidirish jarayonini

$$\max T_k = (\nabla f(X^k), s_k) = 0 \quad (10.25)$$

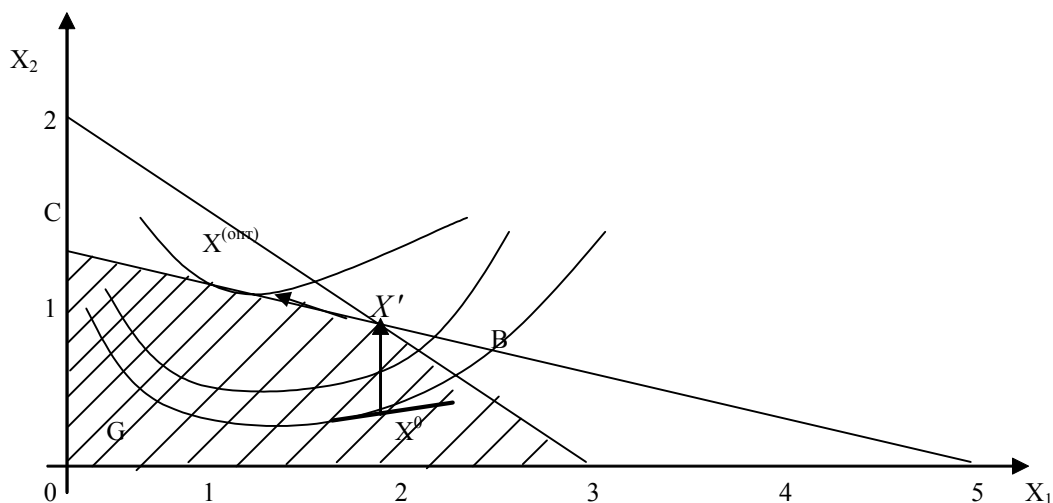
shartni qanoatlantiruvchi X^* nuqta topilguncha davom ettiramiz.

Misol.

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + 4x_2 \leq 5, \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\
& Z = f(X) = x_1 + 2x_2 - 0,5x_1^2 - 0,5x_2^2 - 5. \rightarrow \max
\end{aligned}$$

Yechish. Optimal yechimni qidirishni $X^0 = (1,5; 0,5)$ nuqtadan boshlaymiz. 10.5-shakldan ko'rinadiki, rejalardan tashkil topgan G to'plam $OAVS$ to'rtburchakni tashkil etadi va $X^0 \in G$ -ichki nuqta. Demak, X^1 nuqtaga tomon $\nabla f(X^0)$ gradient bo'lib yo'nalish kerak. X^0 nuqtadagi gradient



10.5-shakl

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right) = (-0,5; 1,5).$$

X^1 nuqtaning koordinatalarini x_{11}, x_{12} bilan belgilaymiz,

$$X^1 = (x_{11}, x_{12}).$$

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 \nabla f(X^0),$$

$$X^1 = (1,5; 0,5) + \lambda^0 (-0,5; 1,5);$$

$$x_{11} = 1,5 - 0,5\lambda_0,$$

$$x_{12} = 0,5 + 1,5\lambda_0.$$

Endi λ_0 ning mumkin bo'lgan qiymatlar opalig'ini aniqlaymiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases}
2(1,5 - 0,5\lambda_0) + 3(0,5 + 1,5\lambda_0) \leq 6, \\
1,5 - 0,5\lambda_0 + 4(0,5 + 1,5\lambda_0) \leq 5, \\
1,5 - 0,5\lambda_0 \geq 0, \\
0,5 + 1,5\lambda_0 \geq 0.
\end{cases} \quad (10.26)$$

Bu sistemani yechib,

$$[\lambda'_0, \lambda''_0] = [-0,3333; 0,2727]$$

aniqlaymiz.

Endi

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 * \nabla f(X^0), \quad X^1 \in G$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\lambda_0 \in [\lambda'_0, \lambda''_0]$ ni topamiz.

Buning uchun

$$(\nabla f(X^1), \nabla f(X^0)) = 0$$

tenglamani yechamiz. Bunda quyidagilarga e'tibor beramiz:

$$\nabla f(X^1) = (-0,5 + 0,5\lambda_0; 1,5 - 1,5\lambda_0),$$

$$\nabla f(X^0) = (-0,5; 1,5).$$

Demak,

$$(\nabla f(X^1), \nabla f(X^0)) = (-0,5 + 0,5\lambda_0; 1,5 - 1,5\lambda_0, (-0,5; 1,5)) = 0$$

Bunda

$$0,25 - 0,25\lambda_0^* + 2,25 - 2,25\lambda_0^* = 0,$$

yoki

$$2,5\lambda_0^* = 2,5$$

$$\lambda_0^* = 1.$$

Lekin $\lambda_0^* \notin [-0,3333; 0,2727]$.

Shuning uchun $\lambda_0^* = 0,2727$.

λ_0^* ning topilgan qiymatida navbatdagi X^1 nuqta quyidagicha aniqlanadi:

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 \nabla f(X^0) = (1,5; 0,5) + 0,2727(-0,5; 1,5) = (1,3636; 0,9091).$$

X^1 nuqtada $f(X)$ funktsiya

$$f(X^1) = -3,1621 > f(X^0) = -3,75$$

qiymatga erishadi.

$f(X)$ funktsiyaning X^1 nuqtadagi gradientini topamiz:

$$\nabla f(X^1) = (-0,3636; 1,0909)'$$

X^1 nuqtadan navbatdagi X^2 nuqtadaga o'tish uchun bu gradient bo'ylab siljish mumkin emas, chunki $ABCD$ to'plamidan tashqariga chiqib ketish mumkin. Eng qulay s_1 yo'nalishni aniqlash uchun yuqoridagi (10.20)-(10.23) masalani tuzamiz. Bu masalani tuzishda X^1 nuqta $ABCD$ to'rburchakning chegaraviy nuqtaci ekanligini va u $x_1 + 4x_2 = 5$ tug'ri chiziqda, tishini va demak, X^1 nuqtada berilgan masalaning ikkinchi sharti ($i=2$) tenglikka aylanishini nazarga olamiz. Biz ko'ra, tgan holda bu masala quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$T_1 = (\nabla f(X^1), s_1) = ((-0,3636; 1,0909)(s_{11}; s_{12})) =$$

$$= 0,3636 s_{11} + 1,0909 s_{12} \rightarrow \max, \quad (10.27)$$

$$g_i(s_1) = (1; 4)(s_{11}; s_{12}) = s_{11} + 4s_{12} = 0 \quad (10.28)$$

$$|s_1| = \sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} = 1, \quad (10.29)$$

ya'ni

$$T_1 = -0,3636s_{11} + 1,0909s_{12} \rightarrow \max,$$

$$s_{11} + 4s_{12} = 0,$$

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = 1. \quad (10.30)$$

(10.30) masalani yechib topamiz:

$$s_1 = (s_{11}, s_{12}) = (-0,9700; 0,2425);$$

$$T_{\max} = 1,1464.$$

Demak, $s_1 = (-0,97; 0,2425)$ yo'nalishi bo'yicha ko'tarilib borib

$$X_2 = (x_{21}, x_{22})$$

nuqtaga erishish mumkin.

$$X^2 = X^1 + \lambda_1 s_1 = (1,3636; 0,9091) + \lambda_1 (-0,9700; 0,2425).$$

Bundan $X_{21} = 1,3636 - 0,9700\lambda_1$, $x_{22} = 0,9091 - 0,2425\lambda_1$. (10.31)

λ_1 ning aniqlanish opalig'ini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemadan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 2(1,3636 - 0,97\lambda_1) + 3(0,9091 + 0,2425\lambda_1) \leq 6, \\ 1,3636 - 0,97\lambda_1 + 4(0,9091 + 0,2425\lambda_1) \leq 5, \\ 1,3636 - 0,97\lambda_1 \geq 0, \\ 0,9091 + 0,2425\lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

Sistemani yechib $\lambda_1 \in [0,927; 5,621]$ ekanini aniqlaymiz.

λ_1^* ni topish uchun $(\nabla f(X^2), s_1) = 0$ tenglamani yechamiz.

Bunda

$$\begin{aligned} \nabla f(X^2) &= (-0,3636 + 0,9700\lambda_1; 1,0909 - 0,2425\lambda_1), \\ s_1 &= (-0,9700; 0,2425). \end{aligned}$$

Demak,

$$((-0,3636 + 0,9700\lambda_1; 1,0909 - 0,2425\lambda_1) \times (-0,9700; 0,2425)) = 0.$$

Bunda

$$\lambda_1 = 0,6172.$$

Demak, $\lambda_1 \in [-0,927; 5,621]$ bo'lishi kerak. Shuning uchun

$$\lambda_1^* = \lambda_1 = 0,6172.$$

(10.30) dan

$$\begin{cases} x_{21} = 0,7647, \\ x_{22} = 1,0588 \end{cases} \Rightarrow X^2 = (0,7647; 1,0589)$$

Bu X^2 nuqtadagi $f(X)$ funktsiyaning qiymati

$$f(X^2) = -2,9708 > f(X^1) = -3,1621.$$

X^2 nuqtadagi gradient:

$$\nabla f(X^2) = (0,2351; 0,9412).$$

10.5-shakldan ko'rinadiki, X^2 nuqtada $f(X)$ funktsiya eng katta qiymati erishadi. Analitik nuqtai nazardan buni ko'rsatish uchun X^2 nuqtadan chiquvchi va $\nabla f(X^2)$ gradient bilan eng kichik o'tkir burchak tashkil qiluvchi s_2 yo'nalishni topamiz.

Buning uchun quyidagi masalani yechamiz:

$$\begin{aligned} T_2 = (\nabla f(X^2), s_2) &= (0,2351; 0,9412)(s_{21}, s_{22}) = 0,2351s_{21} + 0,9412s_{22} \rightarrow \max, \\ s_{21} + 4s_{22} &= 0, \\ \sqrt{s_{21}^2 + s_{22}^2} &= 1. \end{aligned}$$

Natijada:

$$\begin{cases} s_{21} = -0,9700, \\ s_{22} = 0,2425 \end{cases} \Rightarrow s_2 = (-0,9700; 0,2425).$$

Topilgan s_2 yo'nalishi uchun

$$T_2 = (\nabla f(X^2), s_2) = 0$$

shart bajariladi. Haqiqatdan ham,

$$T_2 = ((0,2353; 0,9412), (-0,97; 0,2425)) = -0,228241 + 0,228241 = 0.$$

Demak, (10.17) ga asosan X^2 nuqta optimal nuqta bo'ladi. Shunday qilib, masalaning optimal yechimi:

$$\begin{aligned} X^2 &= (x_1 = 0,7647; x_2 = 1,0588), \\ Z_{\max} &= f(X^2) = -2,9708. \end{aligned}$$

5-§. Kvadratik dasturlash masalasini gradient usuli bilan yechish. Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalishlar usuli

Faraz qilaylik, quyidagi kvadratik dasturlash masalasi berilgan bulsin:

$$A_i X \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (10.33)$$

$$X \geq 0, \quad (10.34)$$

$$Z = f(X) = C'X + X'DX \rightarrow \max \quad (10.35)$$

bu erda $X'DX$ - nomanfiy aniqlangan kvadratik forma;

A_{in} o'lchovli vektor qator ($A(a_{i1}, \dots, a_{in})$), X_p o'lchovli vektor ustun, S_n o'lchovli vektor ustun. (10.33)-(10.34) shartlar orqali aniqlangan qavariq to'plamni G bilan belgilaylik. Har qanday gradient usul singari mumkin bo'lgan yo'nalishlar usuli ham ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtadan boshlanadi. X^k nuqtadan X^{k+1} nuqtaga o'tish uchun S_k yo'nalishi tanlanadi. Bu yo'nalishni shunday tanlash kerakki, ixtiyoriy $\lambda_k > 0$ da

$$X^k + \lambda_k S_k$$

nur G to'plamdan tashqariga chiqmasin. Buning uchun s_k yo'nalish $A'_i X^k = b_i$ shartlar o'rinli bo'lgan barcha i indekslar uchun

$$A'_i s_k \leq 0 \quad (10.36)$$

tengsizlikni qanoatlantirish kerak. Bunday i indekslar to'plamini I bilan belgilaymiz va s_k yo'nalishi mumkin bo'lgan yo'nalish deb ataymiz. Agar λ_k ning hech bo'lmaganda kichik qiymatlari uchun $X^k + \lambda_k S_k$ nur bo'yicha yo'nalgan $f(X)$ funktsiyaning o'sishi ro'y bersa, s_k yo'nalish muvofiq (mos) yo'nalish deb ataladi.

Zoytendeyk usuli (10.36) shart bajarilganda va quyidagi normallashtirish shartlaridan

$$s_k' s_k \leq 1, \quad (10.37)$$

$$-1 \leq s'_{ki} \leq 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned} s_{ki1} \leq 1, \quad \nabla f(X^j) > 0, \\ s_{ki} \geq -1, \quad \nabla f(X^j) < 0, \end{aligned} \quad (10.39)$$

$$(\nabla f(X^k), s_k) \leq 1, \quad (10.40)$$

$$A'_i(s_k + X^k) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (10.41)$$

birortasi o'rinli bo'lganda optimal s_k yo'nalishni topishga ,rdam beradi. Bunda s_k yo'nalishni optimal yo'nalish bo'lish kriteriysi

$$(\nabla'f(X^k), s_k) = 0 \quad (10.42)$$

dan iborat, bu erda

$$\nabla'f(X^k) = \left(\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_u} \right)$$

p o'lchovli vektor qator,

$$\nabla f(X^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

p o'lchovli vektor ustun.

Demak, bu usul bo'yicha X^k nuqtadan chiquvchi muvofiq s_k yo'nalishni aniqlash uchun (10.36) shartini ($i \in I$ bo'lganda) va (10.37)-(10.41) shartlarning birortasini o'z ichiga oluvchi hamda shu shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimlar orasida

$$T = \nabla f(X^k) s_k = C + 2DX^k$$

funktsiyaga maksimum qiymat beruvchisini topish masalasi qo'yiladi. Bunda (10.37) - (10.41) shartlar chiziqli bo'lganligi sababli tuzilgan qo'shimcha masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi.

Faqat bir holda, ya'ni normallashtirish sharti sifatida (10.38) shart ishlatilganda qo'shimcha masala quyidagi ko'rinishdagi kvadratik dasturlash masalasiga keltiriladi:

$$\begin{cases} Ps_k + Y = 0, \\ Y \geq 0, \\ (\nabla'f(X^k), s_k) = 1, \\ T = s'_k s_k \rightarrow \min, \end{cases} \quad (10.44)$$

bu erda R matpitsa A_i ($i \in I$) ning qatorlapidan tuzilgan.

Endi bog'liqlik printsipli deb ataluvchi printsipl bilan tanishamiz. Agar X^{k+1} nuqta G to'plamning ichki nuqtaci bo'lsa ($\lambda_k = \lambda''$), yangi s_{k+1} yo'nalish uchun quyidagi shart o'rinli bo'lishi kerak:

$$S'_k D s_{k+1} = 0 \quad (10.45)$$

Bu shart s_k va s_{k+1} yo'nalishlarni o'zaro bog'lovchi shart bo'lganligi uchun uni bog'liqlik printsipli deb ham atash mumkin. Agar bog'liqlik printsiplini (10.45) dan s_k yo'nalishni aniqlashda foydalanilgan bo'lsa, (10.45) shartdan tashqari quyidagi shartlar ham ishlatiladi.

$$S'_k D s_{k+1} = 0, t = k-1, k-2, \dots \quad (10.46)$$

Agar X^{k+1} nuqta chegaraviy nuqta, ya'ni $\lambda_k = \lambda'$ bo'lsa, bog'liqlik printsipli, ya'ni (10.45)-(10.46) shartlar ishlatilmaydi. Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalishlar usulini har qanday chiziqli dasturlash masalalarini yechish uchun qo'llash mumkin. Lekin bog'liqlik printsipli (10.45)-(10.46) bu usul bilan kvadratik dasturlash

masalasini yechish jarayonini osonlashtirgani va chekli sondagi interatsiyadan so'ng uning yechimini topishga yordam bergani uchun uni kvadratik dasturlashga qyllash maqsadga muvofiqdir.

Berilgan masalaning cheklamalaridan ba'zilar $A'_k X^k = b_i$ tenglama ko'rinishda bo'lgan holda $A'_k s_k = 0$ bo'ladi.

$X^k \in G$ to'plamning ichki nuqtasi bo'lsin. U holda (10.36) shart ishlatilmaydi va $Z = S'X + X'DX$ funktsiyaning shartsiz ekstremumini beruvchi nuqtani topish kerak bo'ladi. Buning uchun

$$2DX = -C \quad (10.47)$$

sistemani qo'shimcha yo'nalishlar usuli bilan echish kerak.

(10.47) sistemani bu usul bilan echish uchun eng avval X^0 nuqta va undan boshlanadigan s_0 yo'nalish tanlanadi va yangi

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 s_0 \quad (10.48)$$

nuqtaga o'tiladi. λ_0 quyidagicha topiladi:

$$\lambda_0 = \lambda_0'' = \frac{(\nabla f(X^0), s_0)}{-2s_0' Ds_0} \quad (10.49)$$

s_1 yo'nalishni aniqlash uchun bog'liqlik printsiptidan, ya'ni

$$s_1' Ds_0 = 0 \quad (10.50)$$

shartdan foydalaniladi. Navbatdagi $X^k (k=2, 3, \dots)$ nuqtalap uchun s_k yo'nalish $s_0, s_1', \dots, s_{k-1}$ yo'nalishlar bilan bog'liq bo'lish kerak, ya'ni

$$s_1' Ds_j = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (10.51)$$

Agar X^k nuqtadan chiquvchi yangi s_k yo'nalishni topish mumkin bo'lmasa, masalani echish jarayoni to'xtatiladi va X^k (10.47) sistemaning yechimi bo'ladi.

Zoytendeyk usulining k qadamida qilinadigan ishlar bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, $X^k \in G$ topilgan bo'lsin.

1. X^k nuqtada $\nabla f(X^k)$ gradient topiladi.

2. Muvofiq (mos) s_k yo'nalish aniqlanadi. Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

a) X^k ichki nuqta. Bu holda (10.51) bog'liqlik printsiptidan yoki bo'lmasa (10.37)-(10.41) normallashtirish shartlaridan birortasi (masalan, 10.40) ni qanoatlantiruvchi va maqsad funktsiya $T = (\nabla f(X^k), s_k)$ ga maksimum qiymat beruvchi s_k topiladi. Demak, s_k yo'nalishni topish uchun quyidagi qo'shimcha masala yechiladi:

$$(\nabla f(X^k), s_k) \leq 1, \quad (10.52)$$

$$T = (\nabla f(X^k), s_k) \rightarrow \max$$

b) X^k chegaraviy nuqta. Bu holda s_k ni quyidagi qo'shimcha masalaning yechimi sifatida aniqlanadi:

$$\begin{cases} A'_i s_k \leq 0, i \in I, \\ (\nabla f(X^k), s_k) \leq 1, \\ T = (\nabla f(X^k), s_k) \rightarrow \max. \end{cases} \quad (10.53)$$

Topilgan s_k yo'nalish uchun optimallik kriteriysi tekshiriladi. Agar

$$(\nabla f(X^k), s_k) = 0$$

bo'lsa, s_k optimal yo'nalish hamda X^k masalani optimal yechimi bo'ladi. Bu holda

masalani yechish jarayoni to'xtatiladi. Aks holda navbatdagi 2-punktga o'tiladi.

3. λ_k topiladi. Agar X^k ichki nuqta bo'lsa, λ_k ni topish uchun quyidagi formula ishlatiladi:

$$\lambda_k = \lambda_k'' = \frac{(\nabla' f(X^k), s_k)}{2s_k' D s_k} \quad (10.54)$$

X^k chegaraviy nuqta bo'lganda esa quyidagi munosabatlardan foydalanish mumkin:

$$\lambda_k = \lambda_k'' = \min (\lambda_i / \lambda_i > 0),$$

bunda:

$$\lambda_i = -\frac{A_i X^k - b_i}{A_i' s_k}. \quad (10.55)$$

Yangi $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ nuqta topiladi hamda $k+1$ qadamga o'tiladi.

Misol. Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalishlar usulidan foydalanib, quyidagi kvadratik dasturlash masalasini yeching.

$$Z = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Masalada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1' = (1; 2), A_2' = (1; 1),$$

$$S = (10; 0), S' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, X' = (x_1; x_2).$$

Bu belgilashlarda masala quyidagicha ko'rinishga keladi:

$$A_1' X \leq 10,$$

$$A_2' X \leq 6,$$

$$X \geq 0,$$

$$Z = f(X) = C'X + X'DX \rightarrow \max.$$

Boshlang'ich nuqta X^0 ni $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ko'rinishda olamiz. Shuningdek $\nabla f(X^0)$

gradientni hisoblab, uni

$$\nabla f(X^0) = \nabla f_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yozamiz. X^0 nuqtada chegaraviy shartlarning birortasi ham tenglikka aylanmaydi, demak I bo'sh to'plam.

Shuning uchun qo'shimcha masalada (10.36) shartlar qatnashmaydi. Normallashtirish sharti sifatida (10.40) ni olamiz. Shunday qilib, qo'shimcha masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$T = (\nabla' f(X^0), s_0) \rightarrow \max.$$

$$(\nabla' f(X^0), s_0) \leq 1,$$

ya'ni

$$\begin{cases} T = 10s_{01} \rightarrow \max \\ 10s_{01} \leq 1, \end{cases} \quad (10.56)$$

bu erda $s_0 = \begin{pmatrix} s_{01} \\ s_{02} \end{pmatrix}$.

(10.56) masalani yechib, $s_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ni hosil qilamiz. Endi λ_0 ni aniqlaymiz, uning uchun λ''_0, λ'_1 larni topamiz:

$$\lambda''_0 = \frac{(\nabla' f(X^0), s_0)}{-2s'_0 Ds_0}.$$

$$\lambda'_0 = \min_{\lambda_i > 0} \left\{ \lambda_i = \frac{A'_i X^0 - b_i}{A'_i s_0} \right\}.$$

Bu ifodalarda:

$$(\nabla' f(X^0), s_0) = ((10; 0) \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1,$$

$$-2s'_0 Ds_0 = -2(0, 1, 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,02,$$

$$\lambda_1 = -\frac{A'_1 X^0 - b_1}{A'_1 s_0} = -\frac{(1; 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 10}{(1; 2) \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{(-10)}{0,1} = 100,$$

$$\lambda_2 = -\frac{A'_2 X^0 - b_2}{A'_2 s_0} = -\frac{(1; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6}{(1; 1) \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{-6}{0,1} = 60.$$

Demak,

$$\lambda'_0 = \min\{100; 60\} = 60,$$

$$\lambda''_0 = \frac{1}{0,02} = 50,$$

$$\lambda_0 = \min\{\lambda''_0, \lambda'_0\} = 50.$$

Endi yangi X^1 nuqtani topamiz:

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 50 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.

$$Vf(X^1) = C' + 2DX^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}. \quad (10.57)$$

Bu qadamda ham I bo'sh to'plam, chunki X^1 nuqtada birorta chegaraviy shart tenglamaga aylanmaydi. Shuning uchun X^1 nuqtadan chiquvchi muvofiq (mos) yo'nalish s_1 ni aniqlash uchun quyidagi qo'shimcha masalani tuzamiz:

$$\begin{aligned} T &= (\nabla f(X^l), s_l) \rightarrow \max, \\ (\nabla f(X^l), s_l) &\leq 1. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Bu erda $s_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix}$. (10.58) macalani (10.51) ga asosan quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} T = 10s_{12} \rightarrow \max, \\ 10s_{12} \leq 1. \end{cases}$$

Bundan

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Endi λ_l ni aniqlaymiz:

$$\lambda_l = \min\{\lambda''_l, \lambda'_l\},$$

$$\lambda''_l = \frac{(\nabla f(X^l), s_l)}{-2s'_l Ds_l},$$

bu erda

$$(\nabla f(X^l)) = (0; 10),$$

$$(\nabla f(X^l), s_l) = (0; 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} = 1$$

$$2s'_l Ds_l = 0,04.$$

Demak,

$$\lambda''_l = \frac{1}{0,04} = 25,$$

$$\lambda'_l = \min\{\lambda_l, \lambda_2\}$$

$$\lambda_1 = -\frac{A'_1 X^1 - b_1}{A'_1 s_1} = -\frac{(1;2) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 10}{(1;2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}} = -\frac{5-10}{0,2} = 25,$$

$$\lambda_2 = -\frac{A'_2 X^1 - b_2}{A'_2 s_1} = -\frac{(1;1) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 6}{(1;1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}} = -\frac{5-6}{0,1} = 10,$$

$$\lambda'_l = \min\{25; 10\} = 10,$$

$$\lambda_l = \min\{\lambda''_l; \lambda'_l\} = \min\{25; 10\} = 10.$$

X^2 nuqtani topamiz:

$$X^2 = X^l + \lambda_l s_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III. Bu erda $\lambda_l = \lambda'_l$. Shuning uchun $X^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ nuqta to'plamning chegaraviy nuqtasi

bo'ladi va u $x_1+x_2=6$ tug'ri chiziqda yotadi. Demak, chegaraviy shart ($i=2$) $x_1+x_2 \leq 6$ X^2 nuqtada tenglamaga aylanadi. Shuning uchun qo'shimcha masala (10.36) shartni o'z ichiga olishi kerak. Qo'shimcha masalani tuzishdan oldin bu nuqtadagi gradientni topamiz:

$$\nabla f(X^2) = C' + 2DX^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

s_2 yo'nalishni aniqlash uchun $i=2$ da (14.36) shartni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$A'_2(X^2 + s_2) \leq 6.$$

Bunda $X^2 + s_2 = k$ belgilash kiritib,

$A'_2 k \leq 6$, $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ tengsizlikni hocil qilamiz, ya'ni

$$(1;1) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \leq 6 \quad (10.59)$$

yoki

$$k_1 + k_2 \leq 6.$$

Endi $\nabla f(X^2)$ s_2 ifodada s_2 ni k ga almashtiramiz. Buning uchun quyidagi munosabatlardan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} s_2 &= k - X^2 \\ s_{21} &= k_1 - 5, \\ s_{22} &= k_2 - 1 \end{aligned} \quad (10.60)$$

$$(\nabla f(X^2), s_2) = (2;6) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = (2;6) \begin{pmatrix} k_1 - 5 \\ k_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$(\nabla f(X^2), s_2) = 2(k_1 - 5) + 6(k_2 - 1),$$

yoki

$$(\nabla f(X^2), s_2) = 2k_1 + 6k_2 - 16. \quad (10.61)$$

Endi qo'shimcha masala tuzamiz:

$$\begin{cases} A_i s_2 \leq 0, & i \in I, \\ (\nabla f(X^2), s_2) \leq 1, \\ T = \nabla f(X^2), s_2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (10.62)$$

(10.59)-(10.61) ga asosan qo'shimcha masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$k_1 + k_2 \leq 6,$$

$$2k_1 + 6k_2 \leq 17,$$

$$k_1 \geq 0, k_2 \geq 0,$$

$$T = 2k_1 + 6k_2 - 16 \rightarrow \max$$

Bu masala shartlarini tenglamaga aylantirish uchun qo'shimcha k_3, k_4 o'zaruvchilar kiritamiz va $T \rightarrow \max$ ni $T \rightarrow \min$ ga o'zgartiramiz. Natijada

$$k_1 + k_2 + k_3 = 6,$$

$$2k_1 + 6k_2 + k_4 = 17,$$

$$k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0, k_4 \geq 0$$

$$T = 16 - 2k_1 - 6k_2 \rightarrow \min$$

ifodalarni hosil qilamiz. Hosil bo'lgan masalada k_3 va k_4 noma'lumlarni bazis o'rganuvchilar deb qabyl qilamiz.

$$k_3 = 6 - k_1 - k_2,$$

$$k_4 = 17 - 2k_1 - 6k_2,$$

$$T = 16 - 2k_1 - 6k_2 \rightarrow \min.$$

Simpleks usulni qo'llab, oldin k_1 ni, so'ngra k_2 ni bazisga kiritamiz va natijada

$$k_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} k_3 - \frac{1}{4} k_4,$$

$$k_1 = \frac{19}{4} - \frac{3}{2} k_3 + \frac{1}{4} k_4$$

$$T = -1 + k_4 \rightarrow \min$$

ifodalar hosil bo'ladi.

Optimal yechim:

$$k_1 = \frac{19}{4}, k_2 = \frac{5}{4},$$

$$T_{\max} = 1.$$

Bundan (10.60) ga asosan

$$s_{21} = \frac{19}{4} - 5 = -\frac{1}{4},$$

$$s_{22} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Demak, $s_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $(\nabla f(X^2), s_2) = T_{\max} = 1$. Endi λ_2 ni aniqlaymiz:

$$\lambda_2 = \min(\lambda_2'', \lambda_1'),$$

bunda

$$\lambda_2'' = \frac{(\nabla f(X^2), s_2)}{-2s_2^1 Ds_2}, \quad \nabla f(X^2), s_2 = T_{\max} = 1$$

$$-2s_2^1 Ds_2 = -2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{5}{8}$$

Demak,

$$\lambda_2'' = \frac{1}{\frac{5}{8}} = 1,6$$

$$\lambda_2' = \lambda_1 = \frac{A_1' x^2 - b_1}{A_1' s_2} = \frac{(1;2) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 10}{(1;2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}} = 12,$$

$$\lambda_2' = \min \{ \lambda_2', \lambda_2'' \} = 1,6.$$

Bundan foydalanib, yangi X^3 nuqtani topamiz:

$$X^3 = X^2 + \lambda_2 s_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1,6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

IV. $\nabla f(X^3)$ gradientni topamiz:

$$\nabla f(X^3) = C' + 2DX^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

X^3 nuqta chegaraviy nuqta, chunki X^3 nuqtada ikkinchi ($i=2$) cheklama shart ($x_1 + x_2 \leq 6$) tenglamaga aylanadi. Qo'shimcha masala III bosqichdagidek tuziladi. Bunda chegaraviy shartlardan biri

$$k_1 + k_2 \leq 6$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi cheklamani

$$(\nabla f(X^3), s_3) \leq 1$$

tengsizlikdan foydalanib aniqlaymiz.

$$(3, 6; 3, 6) \begin{pmatrix} s_{31} \\ s_{32} \end{pmatrix} \leq 1.$$

Bundan qo'shimcha masalaning ikkinchi cheklamasi

$$3,6s_{31} + 3,6s_{32} \leq 1$$

kelib chiqadi. Bunda

$$s_{31} = k_1 - 4,6,$$

$$s_{32} = k_2 - 1,4$$

belgilash kiritamiz. Natijada $3,6k_1 + 3,6k_2 - 21,6 \leq 1$ ga ega bo'lamiz. Qo'shimcha masalaning maqsad funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$T = (\nabla f(X^3), s_3) = 3,6k_1 + 3,6k_2 - 21,6 \rightarrow \max.$$

Shunday qilib,

$$k_1 + k_2 \leq 6,$$

$$3,6k_1 + 3,6k_2 \leq 22,6,$$

$$k_1 \geq 0, k_2 \geq 0,$$

$$T = 3,6k_1 + 3,6k_2 - 21,6 \rightarrow \max$$

masalani hosil qilamiz. Bu masalaga simpleks usulni qo'llab yechamiz va optimal yechimni topamiz:

$$k_1=6, k_2=0.$$

$$T_{tax}=0.$$

$$\text{Bundan } (\nabla f(X^3), s_3) = T_{tax} = 0$$

Demak, X^3 nuqta optimal nuqta bo'ladi. Shunday qilib optimal yechim:

$$x_1=4,6, x_2=1,4,$$

$$Z_{max}=33,8.$$

Tayanch so'z va iboralar

Funktsiya gradienti, gradient yo'nalishi, funktsiyaning eng tez o'sish yo'nalishi, mumkin bo'lgan yo'nalish, gradient usul, tezlik bilan ko'tarilish usuli, mumkin bo'lgan yo'nalishlap usuli, muvofiq yo'nalish, bog'liqlik printsiipi, qo'shimcha yo'nalishlap usuli, normallashtirish sharti.

Nazorat savollari

1. Funktsiya gradienti nima ?
2. Funktsiyaning eng tez o'sish yo'nalishi deganda qanday yo'nalishni tushunasiz?
3. Funktsiyaning eng tez kamayish yo'nalishi qanday?
4. Mumkin bo'lgan yo'nalish nima?
5. Funktsiyaning shartsiz ekstremumi gradient usul bilan qanday aniqlanadi?
6. Gradientga asoslangan usullarning g'oyasi va farqi nimadan iborat?
7. Gradient usul bilan qavapiq dasturlash masalasi qanday yechiladi?
8. Tezlik bilan ko'tarilish usuli qanday?
9. Gradient usul bilan kvadratik dasturlash masalasi qanday yechiladi?
10. Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalishlar usulning g'oyaci qanday?
11. Muvofiq yo'nalish nima?
12. Zoytendeyk usulidagi dasturlash shartlari qanday?
13. Mumkin bo'lgan yo'nalishning optimal yo'nalish bo'lish mezoni qanday?
14. Bog'liqlik printsiipi nima?
15. Zoytendeyk usulining algoritmi qanday?

Masalalar

I. Quyidagi qavapiq dasturlash masalalarini joiz yechimi berilgan holda gradient usul bilan optimal yechim topilsin.

1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$
 $X^0 = (1; 2; 3),$
 $Z = x_1 + 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min.$

2) $2x_1 \geq 2,$
 $4x_1 - 4x_2 \leq 0$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, X^0 = (2; 2),$
 $Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min.$

3) $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_1 \leq 3$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, X^0 = (2; 1)$
 $Z = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.$

4) $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$
 $x^0 = (4, 2, 1),$
 $Z = x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min.$

II. Quyidagi chiziqli funktsiyaning ekstremumini gradient usulni qo'llab topin. Ekstremum nuqtaga yaqinlashish jarayonini grafikda tasvirlang:

1) $f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \max,$
 $X^0 = (1; 3).$

2) $f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max,$
 $X^0 = (3; 1).$

3) $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max,$
 $X^0 = (1; 0, 5).$

4) $f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max,$
 $X^0 = (4; 4).$

5) $f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13 \rightarrow \min,$
 $X^0 = (1; 1).$

III. Quyidagi dasturlash masalarini Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalishlap usulidan foydalanib yeching:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 16, \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 0, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad X^0 = (2; 3), \\
 & Z = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 28, \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
 & X^0 = (1; 2; 3) \\
 & Z = x_1 + 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min.
 \end{aligned}$$

XI-BOB. DINAMIK DASTURLASH

1-§. Dinamik dasturlash haqida asosiy tushunchalar. Optimallik printsiplari

Chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog'liq emas deb qaraladi, shuning uchun masalaning optimal yechimi rejalashtirishning faqat bir bosqichi uchun topiladi. Bunday masalalar **bir bosqichli masalalar** nomi bilan ataladi.

Dinamik dasturlash masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog'liq deb qaraladi hamda butun jarayonning optimal rivojini ta'minlovchi bir qator (ketma-ket, har bir bosqich uchun alohida) optimal yechimlar topiladi. Dinamik dasturlash masalalari **ko'p bosqichli** yoki **ko'p qadamli** deb ataladi.

Dinamik dasturlash – vaqtga bog'liq va ko'p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiy jarayonlarni optimal rejalashtirish usullarini o'rganuvchi matematik dasturlashning bir bo'limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning kechishiga ta'sir ko'rsatish mumkin bo'lsa, bunday jarayon **boshqariluvchi** deb ataladi. Jarayonning kechishiga ta'sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to'plamiga **boshqarish** deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarda boshqarishni rejalashtirishning har bir bosqichida vositalarni taqsimlash, mablag' ajratish va shu kabilar bilan ifodalanishi mumkin. Masalan, ixtiyoriy korxonada ishlab chiqarish – boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xom ashyo ta'minoti, moliyaviy mablag'lar miqdori va hokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi har bir yil boshida xom ashyo bilan ta'minlash, ishlab chiqarish jihozlarini almashtirish, qo'shimcha mablag'lar miqdori haqida qarorlar qabul qilinadi. Bunday qarorlar to'plami boshqarishdan iboratdir. Bir qarashda, eng ko'p miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo'lgan vositalarning hammasini berish va ishlab chiqarish jihozlaridan (stanoklaridan, texnikadan va hokazolardan) to'la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin bu jihozlarni tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va kelgusida mahsulot ishlab chiqarish hajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatida noma'qul oqibatlardan xoli bo'lgan xolda eskirgan jihozlarni almashtirish yoki o'rnini to'ldirish choralari belgilanishi lozim bo'ladi. Bu esa dastlabki davrda mahsulot ishlab chiqarish kamaysa ham, keyingi davrlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin. Shunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, har bir davrda uning rivojlanishiga ta'sir etuvchi, bir qancha bosqichlardan iborat deb qaralishi mumkin.

Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirish uchun, har bir oraliq bosqichda alohida qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko'zlanadi. Butun jarayonning yechimi o'zaro bog'langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. O'zaro bog'langan bunday yechimlar ketma-ketligi **strategiya** deb ataladi. Oldindan tanlangan mezonga nisbatan eng yaxshi natijani ta'minlovchi strategiya **optimal strategiya** deb ataladi. Boshqacha aytganda optimal strategiya ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning optimal rivojlanishini ta'minlovchi strategiyadir.

Dinamik dasturlash ko'p bosqichli tuzilishga ega bo'lgan yoki bunday tuzilishga keltiriladigan masalalarning optimal yechimini topish uchun ishlatiladigan matematik vositadir.

Ko'p iqtisodiy jarayonlar o'z o'zidan bosqichlarga bo'linadigan bo'ladi. Masalan 5 yillik, I yillik rejalarni tuzishda har bir bosqich sifatida I yil, kvartal, dekadalarini ko'rsatish mumkin. Lekin ba'zi masalalar vaqtga bog'liq bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, eng qisqa yo'l bilan ko'zlangan marraga (joyga) borish masalasi vaqtga bog'liq emas. Lekin bu masalani ko'p bosqichli masalaga aylantirib, uni dinamik dasturlash usuli bilan yechish mumkin.

Ko'p bosqichli iqtisodiy masalalarni yechish uchun ularni yagona matematik modelini yoki bo'lmasa, har bir bosqichga mos keluvchi statik modellar tizimini tuzib so'ngra uni dinamik dasturlash usullari bilan yechish kerak.

Shunday qilib, ko'p bosqichli jarayon sifatida ifodalanuvchi matematik dasturlash masalalarini yechish dinamik dasturlashning predmetini tashkil etadi.

Ko'p bosqichli jarayon deganda vaqtga bog'liq ravishda rivojlanuvchi va o'z taraqqiyotida bir necha bosqichlarga bo'linuvchi jarayonni tushunish kerak.

Dinamik dasturlash quyidagi xususiyatlarga ega:

1) dinamik dasturlash ko'p bosqichli jarayonning birdan-bir yagona yechimini emas, balki har bir bosqichga mos keluvchi va tub manfaatni ko'zlovchi yechimlar ketma-ketligini topishga yordam beradi;

2) dinamik dasturlash yordami bilan yechilayotgan ko'p bosqichli masalaning ma'lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog'liq bo'lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi faktlar nazarga olinadi;

3) dinamik dasturlash yordami bilan ko'p bosqichli masalani yechish jarayonining har bir bosqichida tub maqsadni ko'zlovchi yechimni aniqlash kerak, ya'ni yechimlar orasida provard maqsadga erishishga maksimal hissa qo'shuvchi yechimni topish kerak.

Demak, ma'lum bir bosqichda topilgan optimal reja faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki butun jarayonning tub (provard) maqsadi nuqtai nazaridan optimal reja bo'lishi kerak. Bunday printsip «**dinamik dasturlaning optimallik printsipi**» deb ataladi.

Optimallik printsipiga amal qilish har qadamda qabul qilingan yechimni kelgusida qanday oqibatlarga olib kelishini nazarga olib borish demakdir. Bundan tashqari optimallik printsipini yana quyidagicha talqin qilish mumkin.

Har bir bosqichdan avval sistemaning holati qanday bo'lishidan qat'iy nazar shu bosqichdagi optimal yutuq bilan undan keyingi bosqichlardagi optimal yutuqlarning yig'indisini maksimallashtiruvchi boshqarishni tanlash kerak.

Demak, boshqarishning optimal strategiyasini topish uchun eng avval n -qadamdagi optimal strategiyani topish kerak, keyin n va $n-1$ -qadamlardagi optimal strategiyani va hokazo, barcha qadamlardagi optimal strategiyani topish kerak.

Bu printsipga asosan dinamik dasturlash masalasini oxirgi n -qadamdagi optimal strategiyani topishdan boshlash kerak. Buning uchun undan oldingi qadamdagi yechim haqida ayrim taxminlar qilinadi va bu asosda W mezonni

maksimallashtiruvchi U_n^0 boshqarish tanlanadi. Bunday boshqarish **shartli boshqarish** deb ataladi.

Demak, optimallik printsipli har qadamda undan oldingi qadamning mumkin bo'lgan ixtiyoriy bir natijasi uchun shartli optimal boshqarishni topishni talab qiladi.

2-§. Dinamik dasturlash usullari bilan yechiladigan iqtisodiy masalalar

1. Sanoat birlashmasini optimal rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, n ta korxonani o'z ichiga oluvchi sanoat birlashmasining T yillik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashma uchun K_0 miqdorda mablag' ajratilgan bo'lsin. Bu mablag' korxonalararo taqsimlanadi. Korxonalar ajratilgan mablag'ni to'la yoki qisman ishlatadi va ma'lum miqdorda daromad oladi. Keyingi bosqichlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo'ladi: korxonalararo kapital mablag'ni shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, natijada birlashmaning T yil davomida olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Har yilning boshida birlashmadagi har bir korxonaga ajratiladigan xom ashyo, kapital mablag' va yangilanishi kerak bo'lgan uskunalarining soni haqida yechim qabul qilinadi. Bu yechimlar to'plami **boshqarish** deb ataladi. Demak t -qadamdagi boshqarish

$$U^t = (U_1^t, U_2^t, \dots, U_n^t)$$

vektor orqali ifodalanadi, bu erda U_j^t ($j=1, \dots, n$) j korxona uchun t qadamning boshida ajratilgan xom ashyo, kapital mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Butun birlashmaning T davr ichida boshqarishni

$$U = (U^1, U^2, \dots, U^T)$$

vektor orqali ifodalash mumkin. Bundan tashqari birlashmadagi har bir j -korxonaning holatini ko'rsatuvchi X_j vektorni kiritamiz.

$$X_j = (X_{j1}^1, X_{j2}^1, \dots, X_{jl}^1) \quad (j=1, \dots, n)$$

Bu erda X_j^t ($j=1, \dots, n$) t qadamning boshidagi j -korxonaning moddiy-ashyoviy va moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatuvchi vektor bo'lib, uning komponentalari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar, moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatadi, ya'ni

$$X_j^t = (X_{j1}^t, X_{j2}^t, \dots, X_{jl}^t)$$

Demak, yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori birlashmadagi korxonalar sistemasining t qadam boshidagi holatini ko'rsatuvchi vektordir, ya'ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Sistemaning boshlang'ich holati X_0 berilgan deb faraz qilamiz. Maqsad funktsiya sifatida birlashmaning T davr ichida oladigan daromadlari yig'indisini ifodalovchi

$$Z = \sum_{t=1}^T Z^t \rightarrow \max$$

funktsiyani kiritamiz. Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga ma'lum bir chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni **joiz boshqarishlar to'plami** deb ataymiz.

Shunday qilib, quyidagi dinamik dasturlash masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G, \quad (11.1)$$

$$Z = \sum_{t=1}^T Z^t \rightarrow \max. \quad (11.2)$$

Hosil bo'lgan (11.1)-(11.2) model ishlab chiqarishning dinamik modeli deb ataladi. Bu modelga asosan har bir t qadamdagi U^t boshqarishni shunday aniqlash kerakki, natijada sistemaning rejalashtirilayotgan davr ichida erishgan daromadlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

2. Mahsulot ishlab chiqish va uni saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli

Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan talabni qondirishga qaratilgan ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz. Rejalashtirilayotgan davrning uzunligi T bo'lsin. Bu davrning har bir t -qadamida ($t=1, \dots, T$) mahsulotga bo'lgan talab $V(t)$ ma'lum deb faraz qilamiz. Xuddi shuningdek, t qadamdagi ishlab chiqarish rejasini $X(t)$ bilan belgilaymiz. T davr davomida korxonadagi mahsulotlar zahirasi kamayib yoki ortib borishi mumkin. Faraz qilaylik, boshlang'ich ($t=0$) qadamda korxonadagi mahsulot zahirasi $Z(0)$ bo'lsin. U holda $X(t) > V(t)$ bo'lganda t -qadamdagi mahsulot zahirasi quyidagicha aniqlanadi

$$Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0) \geq 0$$

Agar t qadamda ishlab chiqarilgan mahsulot talabdan kam bo'lsa, ya'ni

$$X(t) < V(t)$$

bo'lsa, u holda t -qadamning boshida korxonada mavjud bo'lgan mahsulot zahirasi $V(t) - X(t)$ ga kamayadi, ya'ni

$$Z(t) = Z(t-1) - V(t) + X(t)$$

bo'ladi.

Ixtiyoriy qadamdagi mahsulot zahirasi noldan kichik emas deb faraz qilamiz hamda $t=0$ boshlang'ich qadam bilan t -qadam orasidagi mahsulotga bo'lgan umumiy talabni $\bar{V}(t)$ bilan, umumiy ishlab chiqarish hajmini $\bar{X}(t)$ bilan belgilaymiz. U holda yuqoridagi

$$\bar{V}(t) = \int_0^t V(t) dt$$

$$\bar{X}(t) = \int_0^t X(t) dt$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Faraz qilaylik, mahsulotni bir birligini saqlash uchun sarf qilingan harajat s birlik va ishlab chiqarish harajatlari funksiyasi $K(t)$ bo'lsin. Ishlab chiqarish harajatlari funksiyasi $K(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori $X(t)$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni $K(t)=f(X(t))$. Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada mahsulot ishlab chiqarish va saqlash usun sarf qilingan harajatlar minimal bo'lsin, ya'ni

$$Y = \int_0^T f(X(t))dt + c \int_0^T (X(t) - V(t) + Z(0))dt \rightarrow \min \quad (11.3)$$

Maqsad funksiya ikki qismdan iborat bo'lib, uning birinchi qismi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan harajatlarni, ikkinchi qismi esa mahsulotlarni saqlash uchun sarf qilingan harajatlarni ko'rsatadi.

Bundan tashqari masaladagi noma'lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$Z(0) \geq 0 \quad (11.4)$$

$$X(t) - V(t) + Z(0) \geq 0 \quad (11.5)$$

$$X(T) - V(T) = Z(T) \quad (11.6)$$

Bunda (11.4) shart rejalashtirilayotgan davrning boshidagi mahsulot zahirasi manfiy emasligini ko'rsatadi. (11.5) shart ixtiyoriy t bosqichdagi mahsulot zahirasi manfiy emasligini ko'rsatadi. (11.6) shart rejalashtirilayotgan davrning oxirida korxonada ortib qolgan mahsulot miqdori $Z(T)$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

Hosil bo'lgan (11.3)-(11.6) model mahsulot ishlab chiqarish va saqlashni rejalashtirishning **dinamik modeli** deyiladi.

Bu modelga asosan har bir qadamdagi mahsulot ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada uni ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan harajatlar yig'indisi minimal bo'lsin.

Misol. Xaridorgir mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun bu mahsulot ishlab chiqaruvchi n ta korxonalarga S ming so'm kapital mablag' ajratilgan.

Agar i -korxonaga x_i ming so'm kapital mablag' ajratilsa, u holda bu korxonadagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi $f_i(x_i)$ miqdorga oshadi.

Barcha korxonalarda ishlab chiqariladigan mahsulot hajmini maksimal oshirish uchun kapital mablag'ni korxonalarga qanday taqsimlash kerak?

Yechimi. Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\sum_{i=1}^n x_i = S, \quad (1)$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max. \quad (3)$$

bu erda $f_i(x_i)$ – x_i kapital mablag'ning chiziqsiz funksiyasi.

Agar $f_i(x_i)$ –qavariq funksiya bo'lsa, u holda masalani V-bobda tanishgan usullardan birini qo'llab yechish mumkin. Agar $f_i(x_i)$ –ixtiyoriy chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda (1)-(3) masalani dinamik dasturlash usulini qo'llab yechish maqul. Buning uchun masalani ko'p bosqichli masala sifatida ifodalash kerak. Kapital mablag'ni n ta korxonaga taqsimlash variantlarini o'rganish va har bir variantga mos

keluvchi samaradorlik darajasini aniqlash o'rniga S miqdordagi kapital mablag'ni avval bitta korxonaga, keyin ikkita, va hokazo, n ta korxonaga taqsimlash samaradorligini aniqlaymiz. Shunday yo'l bilan masala ko'p bosqichli dinamik dasturlash masalasiga aylanadi.

Har bir k -korxonaga ajratiladigan kapital mablag' haqidagi qaror boshqarish bo'ladi. Shunday boshqarishlar ichida F funktsiyaga maksimal qiymat beruvchisini topish kerak.

3-§. Dinamik dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi. Bellmannning funktsional tenglamalari

Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan va boshqarish mumkin bo'lgan sistemani ko'ramiz. Bu sistemani T ta bosqichlarga ajratish mumkin deb faraz qilamiz $t=1, \dots, T$. har bir bosqichning boshidagi sistemaning holatini X_t bilan belgilaymiz.

$$X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}).$$

Taraqqiyot jarayonida sistemaning holati o'zgaradi. Uning X_{t-1} holatdan X_t holatga o'tishga U_t boshqarish ta'sir qiladi. Demak, X_t X_{t-1} va U_t o'zgaruvchilarning funktsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$X_t = \varphi(X_{t-1}, U_t).$$

Bu erda U_t mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami G_t ga tegishli, ya'ni

$$U_t \in G_t$$

Bunday aniqlashlarda sistemaning butun $[0, T]$ davr ichidagi taraqqiyoti $X_0, X_1, \dots, X_{T-1}, X_T$ vektorlar ketma-ketligi orkali aniqlanadi. ($X_t \in \bar{X}_t$) \bar{X}_t –sistemaning t bosqichda mumkin bo'lgan holatlar to'plami. Sistemani boshlang'ich X_0 holatdan X_T holatga o'tkazish uchun $U_0, U_1, \dots, U_{T-1}, U_T$ boshqarishlar ketma-ketligi, ya'ni strategiyalar hizmat qiladi. Sistemani eng yaxshi X_T holatga o'tishini ta'minlash uchun $f_T(X)$ maqsad funktsiyani kiritamiz.

$$f_T(X) = \sum_{t=1}^T Z_t(X_{t-1}, X_t),$$

bu erda $Z_t = (X_{t-1}, X_t)$ sistemaning X_{t-1} holatdan X_t holatiga o'tishida hisoblanadigan va bu holatlarni solishtirib baholovchi funktsiyadir.

Agar sistemaning t bosqichdagi holatlar to'plami \bar{X}_t , mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami G hamda sistemani bir holatdan ikkinchi holatga o'tkazish qoidasi, hamda bu holatlarni solishtiruvchi funktsiya $Z_t = (X_{t-1}, X_t)$ berilgan bo'lsa, T bosqichli sistema to'la aniqlangan bo'ladi. Bunday sistemani ifodalovchi dinamik dasturlash masalasi quyidagicha yoziladi.

Sistemani boshlang'ich holati X_0 ma'lum bo'lganda shunday

$$U_t = (U_1, U_2, \dots, U_T)$$

strategiyani tanlash kerakki, u

$$X_t = \varphi(X_{t-1}, U_t), X_t \in \bar{X}_t, U_t \in G_t, t=1, \dots, T \quad (11.7)$$

shartlarni qanoatlantirib

$$f_T(X) = \sum_{t=1}^T Z_t(X_{t-1}, X_t) \quad (11.8)$$

funktsiyaga ekstremal qiymat bersin.

Ushbu munosabatlardan ko'rinadiki, dinamik dasturlash masalasi ko'p bosqichli tanlash masalasi bo'lib, uning U^* optimal echimi bir nechta bosqichlarda topilgan mumkin bo'lgan U_t boshqarishlar asosida tanlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan, dinamik dasturlash masalasini quyidagicha talqin qilish mumkin:

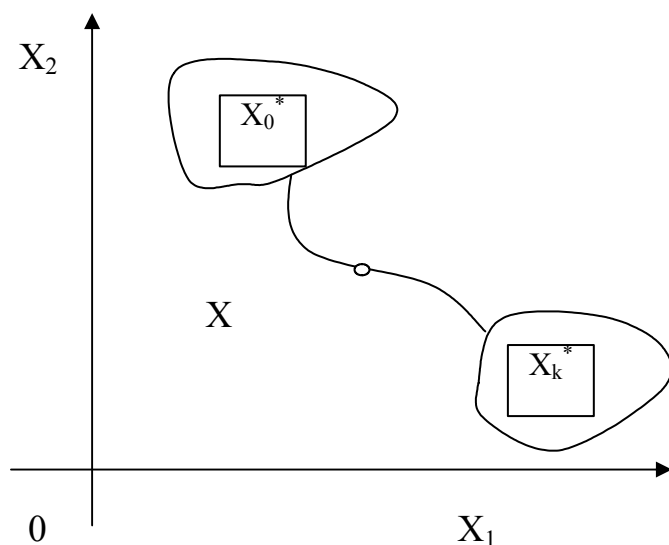
Umumiy holda sistemaning boshlang'ich X_0 holati va oxirgi X_k holati aniq berilmaydi, hamda boshlang'ich xolatning butun bir X_0^* sohasi va oxirgi xolatlarining X_k^* sohasi ko'rsatiladi.

Umumiy holda dinamik dasturlash masalasi quyidagicha ta'riflanadi:

Biror boshqariluvchi X sistema boshlang'ich $X_0 \in X_0^*$ holatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan sistemaning holati o'zgaradi va u $X_k \in X_k^*$ oxirgi holatga o'tadi, deb hisoblaylik. Sistema holatlarining o'zgarishi biror miqdoriy W -mezon (kriteriy) bilan bog'liq deylik. Sistemaning o'zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda W -mezon o'zining optimal qiymatiga erishsin.

U-mumkin bo'lgan boshqaruvlar to'plami bo'lsin. U holda, masala X sistemani $X_0 \in X_0^*$ holatdan $X_k \in X_k^*$ holatga o'tkazishga imkon beruvchi shunday $U^* \in U$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda $W(U)$ mezon o'zining $W^* = W(U^*)$ optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning X_0 holatini sonli parametrlar bilan, masalan ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investitsiyalar miqdori, sarflangan yonilg'i miqdori va h.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlarni sistemaning koordinatalari deb ataymiz. U holda sistemaning holatini X nuqta bilan va uning X_1 holatdan X_2 holatga o'tishini X nuqtaning traektoriyasi bilan va uning X_0 holatdan X_k holatga o'tishini X nuqtaning traektoriyasi bilan tasvirlash mumkin.



1-shakl.

(11.7)-(11.8) masalani yechishdan avval

$$G_T, G_{T-1,T}, \dots, G_{1,2,\dots,T}=G$$

belgilashlar kiritamiz. Bu erda G_T – masalaning oxirgi T bosqichdagi aniqlanish sohasi, $G_{T-1,T}$ – T va $T-1$ bosqichlardagi aniqlanish soha, $G_{1,2,\dots,T}=G$ – berilgan masalaning aniqlanish sohasi.

Maqsad funktsiyaning oxirgi bosqichdagi optimal qiymatini $f_1(x_{T-1})$ bilan belgilaymiz:

$$f_1(X_{T-1}) = \max_{U_{T-1} \in G_T}(\min)[Z_T(X_{T-1}, U_T)] \quad (11.9)$$

Xuddi shuningdek, $T-1$ qadamdagi shartli optimal qiymatni $f_2(x_{T-2})$ bilan belgilaymiz. U holda

$$f_2(X_{T-2}) = \max_{U_{T-2} \in G_{T-1,T}}(\min)[Z_{T-1}(X_{T-2}, U_{T-1}) + f_1(X_{T-1})] \quad (11.10)$$

Xuddi shuningdek,

$$f_3(X_{T-3}) = \max_{U_{T-3} \in G_{T-1,T}}(\min)[Z_{T-2}(X_{T-3}, U_{T-2}) + f_2(X_{T-2})] \quad (11.11)$$

$$f_k(X_{T-k}) = \max_{U_{T-k} \in G_{T-k,\dots,T}}(\min)[Z_{T-k+1}(X_{T-k}, U_{T-k+1}) + f_{k-1}(X_{T-k+1})], (k = \overline{1, T-1})$$

$$f_T(X_o) = \max_{U_1 \in G}(\min)[Z_1(X_o, U_1) + f_{T-1}(X_1)] \quad (11.13)$$

Bu erda (11.9)-(11.13) ifodalar optimallik printsiplining matematik formadagi yozilishidan iborat bo'lib, ular «**Bellmanning funktsional tenglamalari**» yoki «**dinamik dasturlashning asosiy funktsional tenglamalari**» deb ataladi.

Bu tenglamalar yordamida dinamik dasturlashning $T-1$ bosqichdagi yechimini so'ngi T bosqichdagi yechim orqali topiladi. Shuning uchun yuqoridagi munosabatlar Bellmanning rekkurent munosabatlari deb ataladi.

4-§. Dinamik dasturlash usuli

Dinamik dasturlashning optimallik printsipliga asosan har bir qadamda topilgan yechim faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki so'ngi, tub maqsad nuqtai nazaridan optimal bo'lishi kerak ekanligini ko'rgan edik. Dinamik dasturlash masalalarini yechish usullari uchun ana shu printsipl asos qilib olingan.

Faraz qilaylik, birinchi qadamdagi boshqarish U_1 bo'lsin. Buning ta'sirida sistema X_o holatdan X_1 holatga o'tadi va natijada $Z_1(X_o, U_1)$ yutuq keltiradi. Ikkinchi qadamda U_2 boshqarish sistemani X_1 holatdan X_2 holatga o'tkizadi va natijada $Z_2(X_1, U_2)$ foyda keltiradi va hokazo. K qadamda U_k boshqarish sistemani X_{k-1} holatdan X_k holatga ko'chiradi va $Z_k(X_{k-1}, U_k)$ yutug' keltiradi.

Demak, sistemani X_0 holatdan X_T holatga ko'chirish uchun shunday $\bar{U}=(U_1, U_2, \dots, U_T)$ boshqarish (strategiyani) tanlash kerakki, undagi $Z_T(X_0, \bar{U})$ yutuq (zarar) maksimal (minimal) bo'lsin, ya'ni

$$f_T(X_0)=Z(X_0, \bar{U}) \rightarrow \max(\min).$$

Agar $Z_T(X_0, \bar{U})$ ni

$$Z_T(X_0, \bar{U})=Z_1(X_0, U_1)+Z_2(X_1, U_2)+\dots+Z_T(X_{T-1}, U_T)$$

yig'indi ko'rinishida ifodalasak, dinamik dasturlash masalasi

$$f_T(X_0)=Z(X_0, \bar{U})=Z_1(X_0, U_1)+Z_2(X_1, U_2)+\dots+Z_T(X_{T-1}, U_T)$$

funktsiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi

$$\bar{U}=(U_1, U_2, \dots, U_T)$$

boshqarishni topishga keltiriladi.

Bunday boshqarishni topish jarayoni esa, quyidagicha amalga oshiriladi:

Eng avval jarayonni teskari yo'nalishda (X_{T-1} dan X_0 ga tomon) tahlil qilamiz. Buning uchun oxirgi T bosqich uchun funktsional tenglama ko'rinishda bo'ladi.

$$f_1(X_{T-1}) = \max_{U_{T-1} \in G_T}(\min)[Z_T(X_{T-1}, U_T)]$$

Oxirgi T bosqichning boshida jarayon $X_{T-1,1}, X_{T-1,2}, \dots, X_{T-1,k}$ holatlarda bo'lishi mumkin bo'lsin deb faraz qilamiz. Sodda uchun faqat butun sonli $X_{T-1,k} \in X_{T-1}$ holatlarni ko'ramiz.

Bu holatlarning har biri uchun T bosqichdagi shartli optimal $U_{T,1}, U_{T,2}, \dots, U_{T,k}$ yechimlar va ularga mos keluvchi $Z_{T,1}, Z_{T,2}, \dots, Z_{T,k}$ daromad (chiqim)lar topiladi. $U_{T,1}, U_{T,2}, \dots, U_{T,k}$ yechimlar orasida $f_1(X_{T-1})$ funktsiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi va optimal U^* strategiyaning tarkibiga kiruvchi U^*_T yechim topiladi. Lekin bu yechim masalani yechish jarayonining ikkinchi bosqichida, ya'ni jarayon to'g'ri yo'nalishda (X_0 dan X_{T-1} ga tomon) tekshirilganda topiladi.

Shunday qilib, oxirgi qadam optimallashtiriladi, ya'ni bu qadamning boshida sistema qanday bo'lishidan qat'iy nazar qabul qilinadigan yechim aniqlanadi.

So'ngra $T-1$ bosqichga o'tiladi. Bu qadam uchun funktsional tenglama

$$f_2(X_{T-2}) = \max_{U_{T-2} \in G_{T-1,T}}(\min)[Z_{T-1}(X_{T-2}, U_{T-1}) + f_1(X_{T-1})]$$

tuziladi.

Bu bosqichda ham, xuddi yuqoridagidek har bir mumkin bo'lgan $X_{T-2,k} \in \bar{X}_{T-2}$ holat uchun mumkin bo'lgan $U_{T-1,k} \in G_{T-1}$ yechim va unga mos keluvchi $Z_{T-1,k}$ daromad (chiqim) topiladi. So'ngra $Z_{T-1,k} + f_1$ yig'indilarni o'zaro solishtirib, har bir $X_{T-2,k}$ holatga mos keluvchi yig'indi va unga mos keluvchi shartli optimal yechim $u_{T-1,k}$ topiladi. Bu yechimlar orasida $f_2(X_{T-2})$ funktsiyaga ekstremal qiymat beruvchi va optimal U^* strategiyaning tarkibiga kiruvchi U^*_{T-1} topiladi.

Shunday yo'l bilan davom etib, jarayonning birinchi bosqichiga o'tiladi. Bu qadamda jarayon faqat bitta aniq holatda bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu bosqichda oldingi bosqichlarda topilgan barcha shartli optimal yechimlarni nazarga oluvchi va X_0 holatga mos keluvchi optimal yechim topiladi.

Shunday qilib, hamma mumkin bo'lgan holatlar uchun birin-ketin $f_1, f_2, \dots, f_{T-1}, f_T$ funktsiyalarning qiymatlari va turli bosqich va holatlarga tegishli yechimlar, shu jumladan U^* optimal strategiyaning tarkibiga kiruvchi optimal $U^*_T, U^*_{T-1}, \dots, U^*_1$ yechimlar topiladi. Bu yechimlar asosida tuzilgan U^* strategiya $f_T(X_0)$ funktsiyaga ekstremal qiymat beradi. Optimal

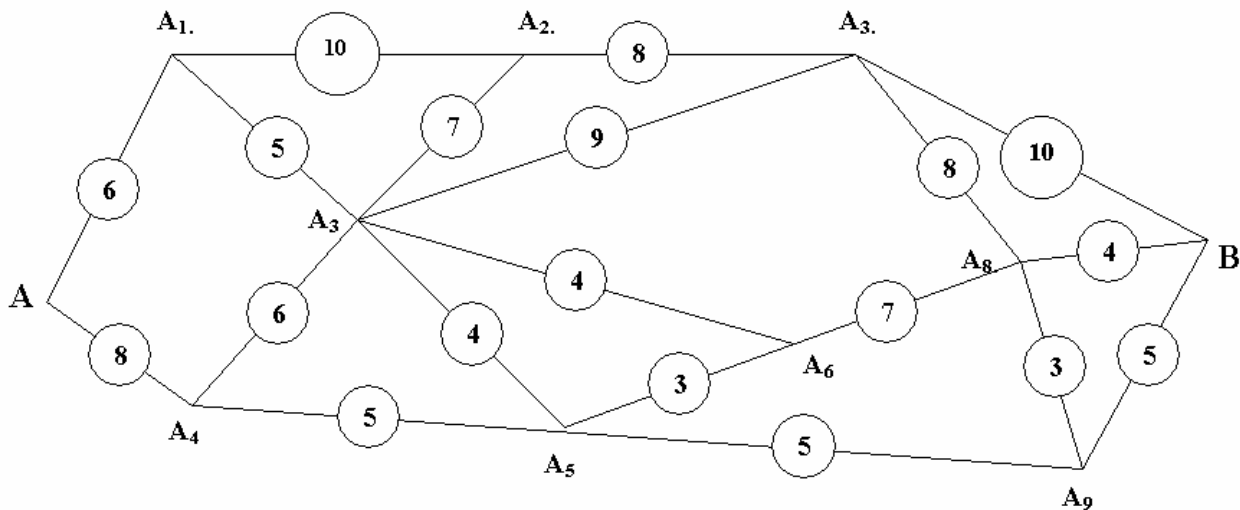
$$U^* = (U^*_1, U^*_2, \dots, U^*_{T-1}, U^*_T)$$

strategiyani aniqlash uchun jarayonni to'g'ri yo'nalishda (X_0 dan X_{T-1} ga tomon) yani bir bor tekshirib chiqish kerak. Bunda, eng avval aniq boshlang'ich X_0 holatdan va topilgan $f_T(X_0)$ funktsiyaning qiymatidan foydalanib, U^*_1 topiladi. So'ngra U^*_1 va $f_{T-1}(X_1)$ funktsiyaning qiymati orqali U^*_2 topiladi va hokazo. Eng oxirida U^*_{T-1} va $f_T(X_1)$ orqali U^*_T topiladi.

Dinamik dasturlash masalasini yechish jarayonini quyidagi misolda yaqqol ko'rsatish mumkin.

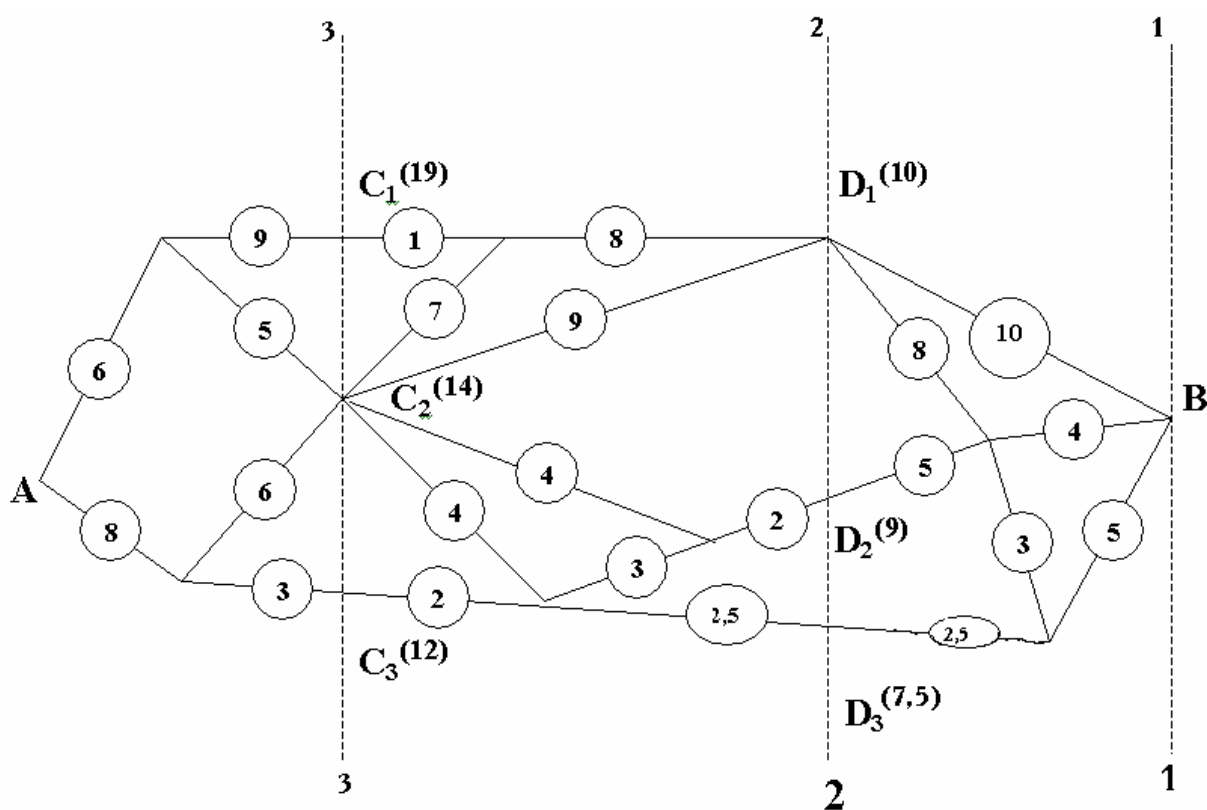
1. Eng qisqa yo'lni tanlash masalasi.

Faraz qilaylik, A va B punktlarni o'zaro bog'lovchi temir yo'llar to'ri berilgan bo'lsin (2-shakl). Bu punktlar orasida temir yo'l bilan bog'langan juda ko'p punktlar mavjud bo'lishi mumkin. Bunda har qanday ikki punkt orasidagi masofa ma'lum deb faraz qilamiz. Masalan, bu masofaning uzunligi 2-shakldagi har ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma ustiga yozilgan sonlardan iborat bo'lsin. A va B punktlarni eng qisqa yo'l bilan tutashtiruvchi marshrutni aniqlash masalasi qo'yiladi.



2-shakl

Masalani yechish uchun (1-1), (2-2), (3-3) chiziqlar yordamida berilgan temir yo'llar to'rini ayrim qismlarga (bosqichlarga) ajratamiz (3-shakl).



3-shakl.

(2-2) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan nuqtalarini D_1 , D_2 , D_3 lar bilan, (3.3) chiziqning kesishgan nuqtalarini esa C_1 , C_2 , C_3 lar bilan belgilaymiz. Birinchi qadamda B nuqtadan D_1 , D_2 , va D_3 nuqtalargacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz.

$$\begin{aligned} B-D_1: \min(10, 8+4, 5+3+8) &= 10, \\ B-D_2: \min(10+8+5, 4+5, 5+3+5) &= 9, \\ B-D_3: \min(5+2,5, 4+3+2,5) &= 7,5. \end{aligned}$$

3-shaklda D_1 , D_2 , D_3 nuqtalardan so'nggi B punktgacha bo'lgan eng qisqa masofa qavs ichida yozilgan. So'ngra (3-3) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan C_1 , C_2 , C_3 nuqtalarni ko'ramiz. Bu nuqtalardan B nuqttagacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz. Bu masofa

$$C_1 \text{ nuqta uchun } \min(1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9, 1+7+2+2,5+7,5) = \min(19, 23, 24, 20) = 19$$

$$C_2 \text{ nuqta uchun } \min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5) = \min(25, 19, 15, 16, 14) = 14$$

$$C_3 \text{ nuqta uchun } \min(2+2,5+7,5, 2+3+2+9) = 12$$

Bu masofalar shaklda qavs ichida yozilgan. 3 bosqichda A nuqtadan B gacha bo'lgan eng qisqa masofa topiladi. Bu masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$\min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12) = 23$$

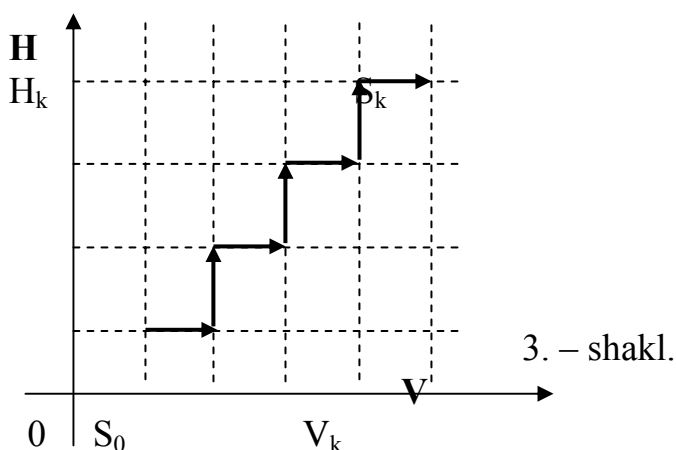
So'ngra A nuqtadan eng qisqa masofa bo'ylab B nuqtaga boradigan yo'lni belgilaymiz.

$$A \rightarrow C_3 \rightarrow D_3 \rightarrow B.$$

2. Samolyotning uchish balandligi va tezligini oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasi.

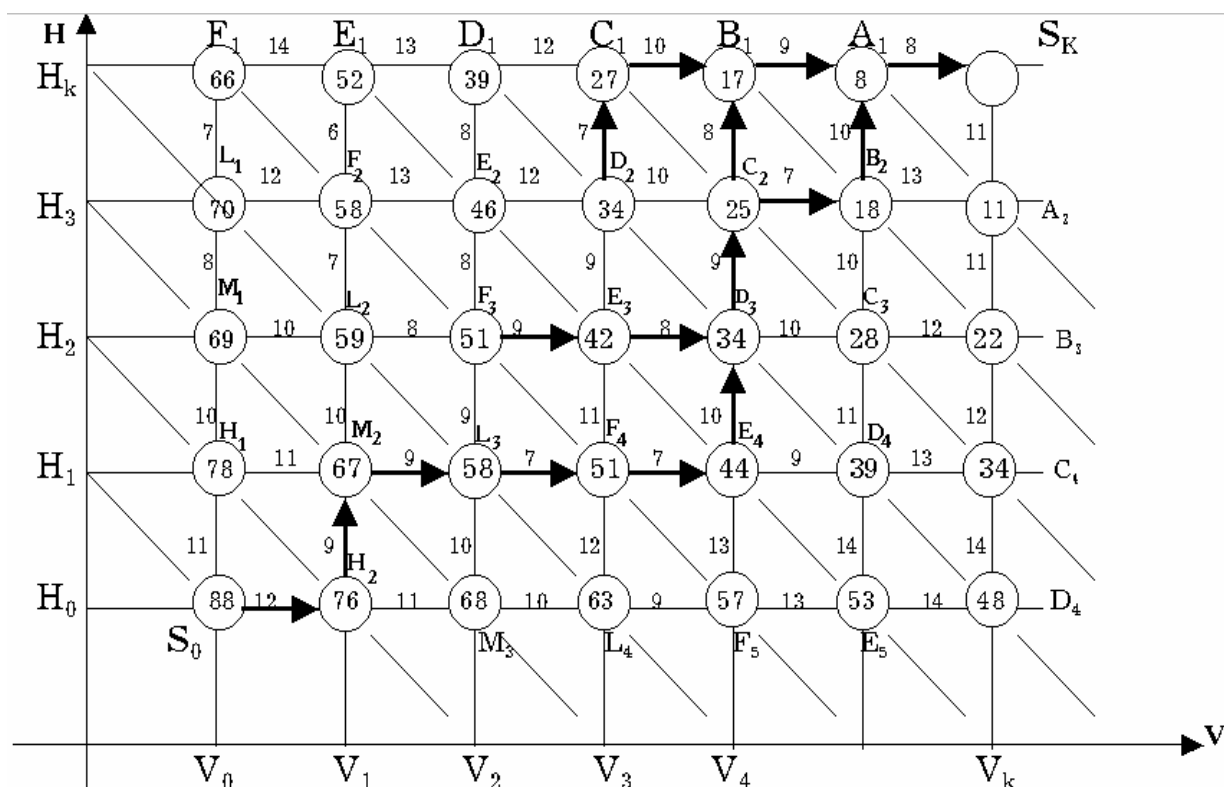
Samolyot dastlab H_0 balandlikda V_0 tezlik bilan uchayotgan bo'lsin. Uning uchish balandligini H_k va tezligini V_k gacha ko'tarish kerak bo'lsin. Demak, samolyotning uchish balandligini H_0 dan H_k gacha, tezligini esa V_0 dan V_k gacha oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasini hal qilish talab etiladi. Bunda aniq bir tezlik bilan uchayotgan samolyotning H_1 balandlikdan $H_2 > H_1$ balandlikkacha ko'tarilishi uchun hamda aniq bir balandlikda uchayotgan samolyotning tezligini V_1 dan $V_2 > V_1$ gacha ko'tarish uchun sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorlari ma'lum deb qaraladi. Ushbu masala dinamik dasturlash masalasi sifatida quyidagicha tavsiflanadi: Samolyotning uchish balandligi va tezligi ko'rsatkichlari to'plamini shunday boshqarish kerakki, natijada sarf qilingan yoqilg'i miqdori minimal bo'lsin.

Yechimi. Samolyotning fazodagi holati ikkita parametr – tezlik (V) va balandlik (H) bilan aniqlanadi. Shuning uchun yechimni VOH tekislikda qidiramiz. Aniqrog'i, shu tekislikdagi $H=H_0$, $H=H_k$ va $V=V_0$, $V=V_k$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka qaraymiz. Samolyotni $S_0 (V_0, H_0)$ holatdan $S_k (V_k, H_k)$ holatga, eng kam xarajat qilib, o'tkazish masalasi qo'yiladi. Bu masalani dinamik dasturlash usullari bilan yechish uchun $(H_k - H_0)$ kesmani n_1 ta teng kesmachalarga, $(V_k - V_0)$ kesmani esa n_2 ta teng kesmachalarga bo'lamiz, hamda har bir qadamda samolyot yo balandligini ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ birlikka), yoki tezligini ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ birlikka) oshiradi, deb qabul qilamiz. S nuqtani S_0 holatdan S_k holatga turli yo'llar bilan o'tkazish mumkin (3-shakl). Bu yo'llar ichida eng kam yoqilg'i miqdoriga mos keluvchisini tanlash kerak.



Masalani yechish jarayonini quyidagi misolda ko'rsatamiz:

Misol. Masaladagi aniq ma'lumotlar quyidagi 4-shaklda tasvirlangan. Samolyotning H_k balandlikka ko'tarilishi va tezligini V_k gacha oshirishda sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorini minimallashtiruvchi yo'lni aniqlang.



4. -shakl.

Ushbu shakldagi vertikal chiziqlardagi sonlar samolyot balandligini oshirgandagi, gorizontall chiziqlardagi sonlar esa u tezligini oshirgandagi sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini ko'rsatadi.

Masalani yechish jarayonini $n_1 + n_2 = 4 + 6 = 10$ qadamlarga bo'lamiz.

Optimallashtirish jarayonini eng oxirgi qadamdan boshlaymiz. Bunda S_k ni o'z ichiga oluvchi o'ng tomondagi eng yuqori to'rtburchakka qaraymiz. Shakldan ko'rinadiki, S_k nuqtaga A_1 va A_2 nuqtalardan o'tish mumkin. Agar A_1 dan S_k ga o'tilsa (tezlik oshirilsa), u holda 8 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Agar A_2 nuqtadan S_k ga o'tilsa (balandlik oshirilsa), u holda 11 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Ushbu raqamlarni A_1 va A_2 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga yozamiz. Bu qadamda eng kam yoqilg'i sarfiga mos keluvchi $A_1 \rightarrow S_k$ yo'nalish shartli optimal yechim deb qabul qilinadi va strelka bilan belgilanadi.

9 qadamda V_1 , V_2 , V_3 nuqtalardan S_k nuqtaga eng kam yoqilg'i sarf qilib o'tish yo'lini aniqlaymiz. Agar V_1 nuqtadan S_k ga $B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ yo'nalishi orqali o'tib 17 birlik yoqilg'i sarf qilish mumkin. V_2 nuqtadan S_k ga ikkita yo'l bilan o'tish mumkin:

I. $B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

II. $B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$

Bunda I yo'lda 18 birlik, II yo'lda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. V_3 nuqtadan S_k ga yagona $B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$ yo'l bilan o'tish va 22 birlik V_1 , V_2 , V_3 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga ulardan S_k nuqtagacha sarf qilinadigan xarajatlardan eng kami yoziladi. Eng kam xarajat bilan bog'liq bo'lgan $B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ yo'nalish shartli optimal yo'nalishi sifatida strelka bilan belgilanadi.

8- qadamda S_1, S_2, S_3, S_4 nuqtalardan S_k nuqtagacha eng kam xarajat sarf qilib o'tiladigan yo'l qidiriladi. Bunda S_1 nuqtadan S_k ga yagona

$$C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

yo'nalish orqali o'tib, 27 birlik yoqilg'i sarflash mumkin.

S_2 nuqtadan V_1 va V_2 nuqtalar orqali S_k nuqtaga o'tilganda teng miqdordagi (25 birlik) yoqilg'i sarf qilinadi.

S_3 nuqtadan S_k ga ikkita yo'l bilan o'tish mumkin:

I. $C_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

II. $C_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$

Bunda I yo'l bilan o'tilganda 28 birlik va II yo'l bilan o'tilganda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

S_4 nuqtadan S_k nuqtaga yagona

$$C_4 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow S_k$$

yo'l bilan o'tiladi va 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

Bu bosqichda shartli optimal boshqarish eng kam yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan $C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ va $C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$ yo'nalishlardan iborat bo'ladi. Bu yo'nalishlar strelka bilan ko'rsatiladi.

Shunday yo'l bilan davom etib, 7 qadamda 34 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 3 ta shartli optimal yo'nalish aniqlanadi:

a) $D_2 \rightarrow C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

b) $D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

v) $D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

6- qadamda 42 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 2 ta shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi:

a) $E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

b) $E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

5- qadamda 51 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalishlar quyidagilar bo'ladi:

I. $F_3 \rightarrow E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$;

II. $F_3 \rightarrow E_3 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$;

III. $F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$;

IV. $F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$

4- qadamda 58 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalish topiladi:

$$L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_4 \rightarrow C_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

3- qadamda 67 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

$$M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

2- qadamda 76 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k;$$

$$H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

Va nihoyat 1- qadamda 88 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$S_0 \rightarrow H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k;$$

$$S_0 \rightarrow H_2 \rightarrow M_2 \rightarrow L_3 \rightarrow F_4 \rightarrow E_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

Bu yo'nalishlar optimal yo'nalish bo'ladi.

Optimal yechimga, asosan, samolyot 1-qadamda tezligini $V_0 + \Delta V$ darajagacha oshiradi, 2- qadamda u balandligini $H_0 + \Delta H$ gacha oshiradi. 3, 4, 5- qadamlarda samolyotning tezligi mos ravishda $V_0 + 2\Delta V$, $V_0 + 3\Delta V$, $V_0 + 4\Delta V$ ga oshishi, 6, 7, 8- qadamlarda esa uning balandligi mos ravishda $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ darajagacha oshishi kerak.

9 va 10 qadamlarda samolyot tezligini mos ravishda $V_0 + 5\Delta V$ va $V_0 + 6\Delta V$ darajagacha oshishi kerak. Natijada u eng kam, ya'ni 88 birlik yoqilg'i sarf qiladi.

5-§. Investitsiyani optimal taqsimlash masalasini dinamik dasturlash usuli bilan yechish

Investor X_0 miqdordagi kapital mablag'ni n ($i=1,2,\dots,n$) ta korxonani o'z ichiga oluvchi birlashmaga sarf qilayotgan bo'lsin. Bu mablag' birlashmadagi n ta korxonaga taqsimlanadi. Agar i -korxonaga x_i miqdorda kapital mablag' ajratilsa, u $Z_i(x_i)$ miqdorda daromadga ega bo'ladi.

Birlashmaning umumiy daromadi korxonalar daromadlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\dots+Z_n(x_n) \quad (11.14)$$

Investitsiyani optimal taqsimlash masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x_1+x_2+\dots+x_n=X_0 \quad (11.15)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,n) \quad (11.16)$$

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\dots+Z_n(x_n) \rightarrow \max. \quad (11.17)$$

Bu erdagi (11.15)-shart birlashmaga ajratilgan X_0 kapital mablag' to'la taqsimlanishi kerakligini; (11.16)–shart masalaning shartiga ko'ra noma'lumlar nomanfiy bo'lishligini va (11.17)–maqsad funktsiya birlashmaning umumiy daromadi maksimal bo'lishligini ko'rsatadi.

Berilgan (11.15)-(11.17) masalada ajratilgan kapital mablag' X_0 ga va korxonalar soni n ga teng. Bu masalani yechishni ko'p bosqichli jarayon deb qaraymiz. Har bir bosqichda ajratilgan kapital mablag' noldan X_0 gacha, korxonalar soni esa, noldan n gacha o'zgaruvchan miqdorlar deb qaraladi. Masalan, birinchi bosqichda $0 \leq x \leq X_0$ mablag' faqat bitta korxonaga, ikkinchi bosqichda 2 ta korxonaga va hokazo, n - bosqichda n ta korxonaga taqsimlanadi deb qaraladi. Shunday qilib,

kapital mablag'ni taqsimlashning statik masalasi dinamik dasturlash masalasiga aylanadi.

Bunday dinamik dasturlash masalasini yechish uchun $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ funktsiyalar ketma-ketligini kiritamiz. Bu erda:

$F_1(x) - 0 \leq x \leq X_0$ miqdordagi mablag'ni faqat 1ta korxonaga taqsimlaganda olinadigan maksimal daromad, $F_2(x) - 0 \leq x \leq X_0$ miqdordagi mablag'ni 2 ta korxonaga taqsimlashdan olinadigan maksimal daromad va hokazo, $F_n(x) - 0 \leq x \leq X_0$ miqdordagi mablag'ni n ta korxonaga taqsimlashdan olinadigan daromad.

Ma'lumki, $F_n(x_0) = Z_{\max}$ bo'ladi. Quyidagi ikki holda $F_i(x)$ funktsiyalar osongina topiladi:

$$1) F_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$2) F_1(x) = Z_1(x), \quad 0 \leq x \leq X_0$$

Demak, agar kapital mablag' taqsimlanmasa, u holda daromad ham nolga teng bo'ladi. Agar kapital mablag' bitta korxonaga taqsimlansa, birlashmaning daromadi ana shu bitta korxona daromadidan iborat bo'ladi (kapital mablag' ajratilmagan korxonalar daromad keltirmaydi deb faraz qilinadi).

Endi $0 \leq x \leq X_0$ miqdordagi kapital mablag' 2 ta korxona orasida taqsimlangan holni ko'ramiz. Agar x_2 —ikkinchi korxonaga ajratilgan mablag' bo'lsa, u holda qolgan $x - x_2$ miqdordagi mablag' birinchi korxonaga ajratiladi. Bu ikki korxonadan olinadigan umumiy daromad quyidagi funktsional tenglama yordamida topiladi

$$F_2(x) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

Faraz qilaylik, $0 \leq x \leq X_0$ miqdordagi mablag' k ta korxona orasida taqsimlangan bo'lsin. Agar k-korxonaga x_k miqdorda mablag' ajratilgan bo'lsa, undan olingan daromad $Z_k(x_k)$ ga teng bo'ladi. Qolgan $x - x_k$ mablag' k-1 ta korxonalar orasida taqsimlanadi va undan olinadigan daromad $F_{k-1}(x - x_k)$ ga teng bo'ladi. Bu holda olinadigan umumiy daromad

$$F_k(x) = \max_{\substack{0 \leq x_k \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)]$$

funktsional tenglama yordamida topiladi. Dastlab berilgan masalaning yechimini $X = X_0$ va $k = n$ bo'lgan holda quyidagi

$$F_n(x) = \max_{0 \leq x_n \leq x} [Z_n(x_n) + F_{n-1}(X_0 - x_n)]$$

funktsional tenglamadan foydalanib topamiz.

Investitsiyani taqsimlash masalasini dinamik dasturlash usuli bilan yechish jarayoni bilan tanishamiz.

Eng avval $0 \leq X \leq X_0$ oraliq n ta teng intervallarga (qadamlar) bo'linadi. har bir qadamning uzunligi Δ ga teng deb qabul qilinadi. Bundan tashqari $Z_i(X)$ va $F_i(X)$ funktsiyalar faqat shu nuqtalarda, ya'ni, $X = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta = X_0$ da aniqlangan deb qabul qilinadi.

$i=1$ da $F_i(X)$ quyidagi tenglik yordamida aniqlanadi $F_1(X)=Z_1(X)$, $F_1(k\Delta)=Z_1(k\Delta)$, $k=0,\dots,n$ tenglikning qiymatlari jadvalga joylashtiriladi. $F_1(k\Delta)$ ning qiymatidan foydalanib $F_2(k\Delta)$ hisoblanadi:

$$F_2(X_0)=\max_{k=0,n}[Z_2(k\Delta)+F_1(X_0-k\Delta)]$$

hisoblash jarayonida $F_2(X)$, $(X=k\Delta, k=0,\dots,n)$ ning qiymatidan tashqari

$Z_2(k\Delta)+F_1(X_0-k\Delta)$ foydani maksimallashtiruvchi x_2 ning qiymati ham topiladi. So'ngra $F_3(x)$ topiladi va hokazo, hamma bosqichlardagi $F_i(x)$ larni hisoblashni bajarib

$$F_n(X)=\max_{0\leq x_n\leq X}[Z_n(x_n)+F_{n-1}(X-x_n)]$$

tenglik yordamida $F_n(X_0)=\max Z$ topiladi.

Shunday qilib, oxirgi bosqichda maqsad funktsiyaning maksimal qiymati $F_n(X_0)$ hamda n -korxona uchun ajratiladigan investitsiya miqdori, ya'ni X_n^* topiladi.

So'ngra hisoblash jarayoni teskari tartibda bajariladi. Bunda oxirgi qadamdan birinchi qadamgacha bir marta qarab chiqiladi:

n -korxonaga ajratiladigan X_n^* kapital mablag'ni bilgan holda qolgan $n-1$ korxonalar orasida taqsimlanadigan $X_0-X_n^*$ topiladi. So'ngra oldin topilgan

$$F_{n-1}(x) = \max_{\substack{0\leq x_{n-1}\leq x \\ 0\leq x\leq X_0}} [Z_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(x - x_{n-1})]$$

dan $F_{n-1}(X_0-x_n^*)$ ni, va demak, x_{n-1}^* ni topamiz, va hokazo. Shunday yo'l bilan davom etib oxirida x_1^* ni topamiz.

Shu bilan chegaralangan investitsiya birlashmaning n ta korxonalari orasida optimal taqsimlangan bo'ladi.

1-misol. Investor 200 birlik kapital mablag'ni birlashmadagi 4ta korxonaga sarf qilmoqchi bo'lsin. har bir korxona o'ziga ajratilgan mablag'ning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar quyidagi 1-jadvalga joylashtirilgan.

1-jadval

Korxonalarga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Investitsiyani korxonalararo optimal taqsimlash rejasini tuzing.

Yechimi. Masalani 4ta bosqichga bo'lib yechamiz. Dastlab $n=1$, ya'ni kapital mablag' faqat bitta korxonaga berilgan holni ko'ramiz. Bunda

$$F_1(x) = Z_1(x)$$

bo'ladi. $0 \leq x \leq 200 = X_0$ oraliqdagi har bir $x_{1k} = k\Delta$ lar uchun $F_1(x_{1k})$ qiymatlarni 2-jadvalga joylashtiramiz.

2-jadval

x_{1k}	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Endi $n=2$ bo'lgan holni, ya'ni $X_0=200$ birlik kapital mablag'ni 2 ta korxonaga taqsimlangan holni ko'ramiz.

Bu holda olinadigan daromad

$$F_2(x) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

funksional tenglama orqali topiladi. Bu funktsiyaning qiymatlari quyidagicha topiladi.

$0 \leq x \leq 200 = X_0$ oraliqdagi har bir x uchun $0 \leq x_2 \leq X_0$ topiladi va unga tegishli bo'lgan

$$Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)$$

hisoblanadi. So'ngra

$$F_2(x) = \max_x [Z_2(x_2) + F_2(x - x_2)]$$

topiladi.

Masalan, $x=0$ da $x_2=0$ bo'ladi;

$x=40$ da $x_2=0$; 40 bo'ladi;

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad Z_2(0) + F_1(40) = 15 \\ x_2 = 40, \quad Z_2(40) + F_1(0) = 14 + 0 \end{array} \right\} \quad F_2(x = 40) = 15$$

$x = 80$ da $x_2 = 0; 40; 80$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad Z_2(0) + F_1(80) = 0 + 28 \\ x_2 = 40, \quad Z_2(40) + F_1(40) = 14 + 15 \\ x_2 = 80, \quad Z_2(80) + F_1(0) = 30 + 0 \end{array} \right\} \quad F_2(x = 80) = 30$$

Va hokazo, shunday yo'l bilan $X=120, 160$ va 200 ga teng bo'lgan hollar uchun $F_2(x=120)$, $F_2(x=160)$, $F_2(x=200)$ larni topamiz. $F_2(x)$ funktsiyani hisoblash jarayonini quyidagi 3-jadvalda ko'rsatamiz.

3-jadval

x_2	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	x_2^*
x								
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3 bosqichda $n=3$ bo'lgan holni, ya'ni $X_0=200$ kapital mablag' 3ta korxona o'rtasida bo'lingan holni ko'ramiz. Bu holda erishiladigan daromadni har bir $0 \leq x_3 \leq x$, $0 \leq x \leq X_0=200$ uchun quyidagi funktsional tenglama orqali hisoblash kerak

Bu funktsiyani hisoblash jarayonini quyidagi 4-jadvalda ko'rsatamiz.

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

4-jadval

x_3	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	x_3^*
x								
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4 bosqichda $n=4$ bo'lgan holni, ya'ni $X_0=200$ kapital mablag' 4ta korxonaga bo'lingan holni ko'ramiz. Bu holda erishiladigan daromad

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \leq x_4 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

funktsional tenglama orqali topiladi. Bu funktsiyani hisoblash jarayoni 5-jadvalda ko'rsatilgan.

5-jadval

x_4	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	x_4^*
x								
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 jadvallardagi $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_4(x)$ larni va ularga mos ravishda x_1^* , x_2^* , x_3^* va x_4^* vektorlarni quyidagi 6-jadvalga joylashtiramiz.

6-jadval

x	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Bu jadvaldan kapital mablag'ni optimal taqsimlash rejasini topamiz. 200 birlik mablag'ni 4 ta korxonaga taqsimlash natijasida birlashma 95 birlik daromad oladi.

$$\max_{i=1,4} F_i(x=200) = \max(90, 90, 93, 95) = 95$$

Bunda to'rtinchi korxonaga 80 birlik mablag' beriladi va ortib qolgan 120 birlik mablag' qolgan 3 ta korxonaga taqsimlanadi. Bundan birlashma

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220) = \max(60, 60, 60) = 60$$

birlik daromad oladi. Bunda uchinchi korxonaga mablag' berilmaydi ($x_3^*=0$). Demak 120 birlik mablag' birinchi va ikkinchi korxonalarga taqsimlanadi. Lekin ikkinchi korxonaga ham mablag' berilmaydi ($x_2^*=0$). Shunday qilib qolgan 120 birlik mablag' birinchi korxonaga beriladi. Bundan birlashma 60 birlik daromad oladi

$$x_1=120, F_1(x)=60$$

Shunday qilib kapital mablag'lar taqsimlashning optimal rejasini topdik:

$$X^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)=(120; 0; 0; 80)$$

Tayanch soʻz va iboralar

Dinamik dasturlash, koʻp bosqichli jarayon, boshqarish, boshqariluvchi jarayon, strategiya, optimal strategiya, optimallik printsiplari, shartli boshqarish, Bellmanning funktsional tenglamalari.

Nazorat savollari

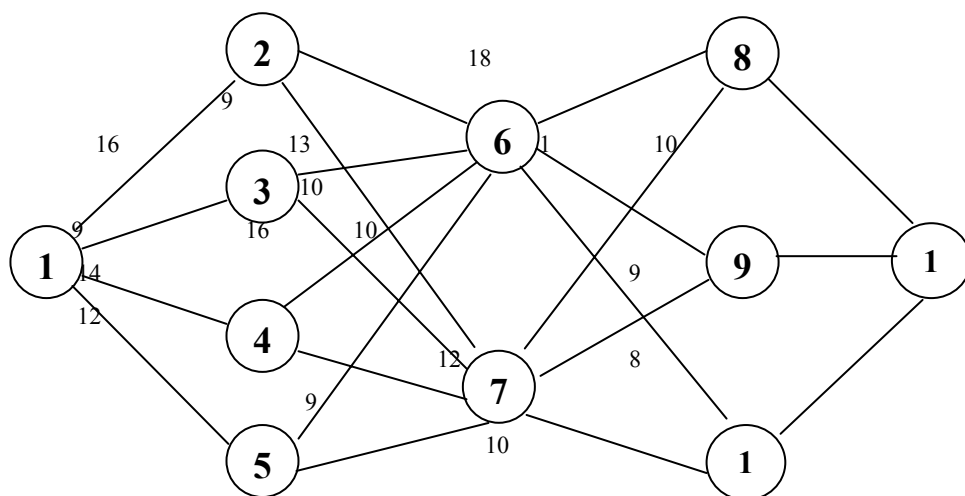
1. Dinamik dasturlashning predmeti nimadan iborat?
2. Dinamik dasturlashning chiziqli dasturlashdan qanday farqi bor?
3. Dinamik dasturlashning qanday xususiyatlarini bilasiz?
4. Dinamik dasturlashning optimallik printsiplari nimadan iborat?
5. Sanoat birlashmasini optimal rejalashtirish masalasining dinamik modeli qanday?
6. Mahsulot ishlab chiqarish va uni saqlashni optimallashtirish masalasining dinamik modeli qanday?
7. Dinamik dasturlash masalasi umumiy holda qanday qoʻyiladi?
8. Dinamik dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
9. Bellmanning funktsional tenglamalari qanday?
10. Dinamik dasturlash usulining gʻoyasi qanday?
11. Investitsiyalarni optimal taqsimlash masalasining matematik modeli qanday?
12. Investitsiyalarni optimal taqsimlash masalasini qanday yoʻl bilan koʻp bosqichli dinamik dasturlash masalasiga aylantirish mumkin?

Masalalar

1. Berilgan masalani dinamik dasturlash masalasi sifatida ifodalang.

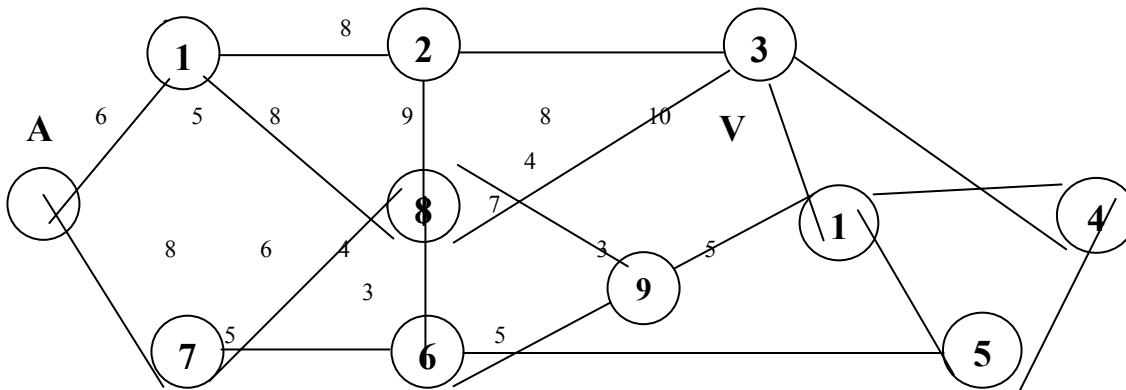
Birlashma m ta korxonani o'z ichiga oladi. Bu korxonalarni texnik jihatdan ta'mirlash maqsadida markazlashtirilgan jamg'arma tashkil etilgan. Bu jamg'armaga birinchi yili A ming so'm mablag' ajratilgan. Keyingi yillarda esa, bu jamg'arma korxonalar daromadidan ajratilgan mablag'lar hisobiga to'ldirib boriladi. Ushbu jamg'armadan i -korxonaga ajratilgan x_i mablag' unga $f_i(x_i)$ miqdorda qo'shimcha daromad keltiradi. n yil ichida korxonalarning topgan qo'shimcha daromadlari maksimal bo'lishi uchun jamg'armadagi mablag' qanday taqsimlanishi kerak?

2. A va B punktlar o'zaro bir necha yo'llar yordamida bog'langan. Yo'lning har bir bo'lagida bir birlik mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport harajatlari ma'lum va ular quyidagi shaklda ko'rsatilgan. Mahsulotni A punktdan B punktga optimal tashish marshrutini aniqlang.



4-shakl.

3. A va V punktlar o'zaro bir necha yo'llar bilan bog'langan bo'lsin. Yo'lining har bir bo'lagida bir birlik mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport harajatlari ma'lum va ular quyidagi shaklda ko'rsatilgan.



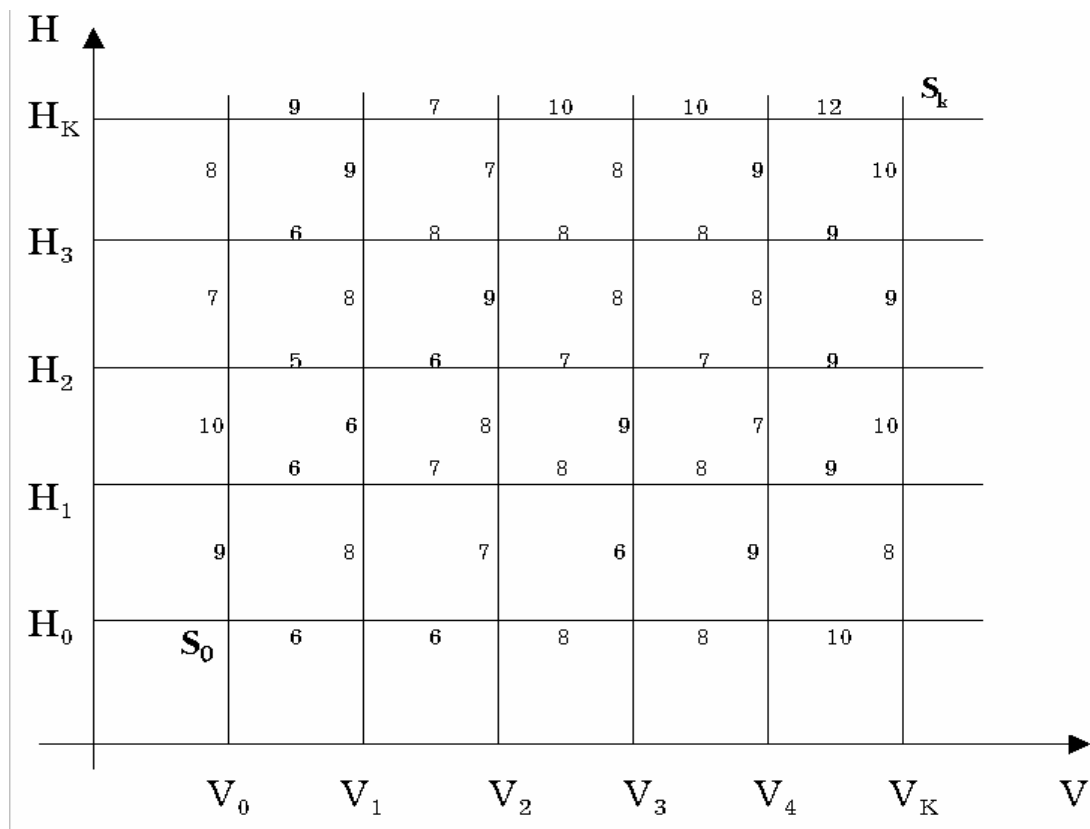
5-shakl.

Mahsulotni A punkdan B punktga optimal tashish marshrutini aniqlang.

4. 120 ming so'mlik investitsiyani 4 ta korxona o'rtasida taqsimlash rejasini toping. Korxonalardagi ishlab chiqariladigan mahsulotning hajmi ajratilgan mablag'ga bog'liq ravishda o'zgarishi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Investitsiya miqdori	Korxonalarda mahsulot hajmi o'sishi			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

5. Samolyotning tezligi va balandligini boshqarish masalasini quyidagi shaklda tasvirlangan ma'lumotlar asosida yeching va sarf qilinadigan eng kam yoqilg'i miqdorini aniqlang.



6- shakl.

6. 5- § da keltirilgan masalani $X_0 = 120$ va $n=4$ bo'lib, x_l va $F(x_l)$ lar quyidagi jadvalda keltirilgan qiymatlarni qabul qilgan hol uchun yeching.

Korxonalarga berilgan kapital mablag'lar	Daromadlar (Korxonalar daromadi)			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	12
30	17	11	13	35
60	28	33	29	40
90	38	45	38	54
120	50	55	46	60

XII BOB. O'YINLAR NAZARIYASI

Chiziqli, chiziqsiz va dinamik dasturlash masalalarida yechimlar qabul qilish ma'lumotlarning to'raligini nazarda tutgan holda amalga oshiriladi. Boshqacha aytganda, masaladagi noma'lum parametrlarni topish uchun zarur bo'lgan dastlabki ma'lumotlar aniq bo'ladi. Bu masalalarda yechimlar qabul qilish aniqlik sharoitida amalga oshiriladi.

Iqtisodiy amaliyotdagi ko'p masalalarda noaniqlikda yechim qabul qilish zaruriyati tug'iladi. Noaniqlikda yechim qabul qilish ikki xil holatda amalga oshirilishi mumkin:

1. Yechim qabul qiluvchi shaxs (EQQSh) ob-havoga, inflyatsiya darajasiga, bozordagi narx-navoga, davlatdagi siyosiy holatga va boshqa «tabiat» holatlariga qarab yechim qabul qiladi. Bu erda «tabiat» deganda yechim qabul qilish uchun zarur bo'lgan tashqi holatlar majmuasini tushunamiz. EQQShning «tabiat»ni turli holatiga qarab yechim qabul qilish jarayonini o'yin deb qarash mumkin. Bunday o'yin, ya'ni raqobat mavjud bo'lmagandagi yechimlar qabul qilish nazariyasi «tabiatga qarshi o'yin» deb ataladi. Bu o'yinda «tabiat» yechim qabul qiluvchi shaxs uchun raqib rolini bajarsa ham, u ongli raqib bo'la olmaydi, u o'z yutug'iga befarq bo'ladi va o'z raqibi xatolaridan foydalanish niyati ham bo'lmaydi.

2. Yechimlar qabul qilish raqobat mavjud bo'lgan vaziyatda amalga oshiriladi. Bu holda ikki yoki undan ko'proq qatnashuvchilar o'zaro raqobatda bo'lib, ularning har biri raqibidan iloji boricha ko'proq yutuq olishga harakat qiladi. Ulardan har birining erishgan natijalari qolgan tomonlarning o'z maqsadiga erishish yo'lidagi harakatiga bog'liq bo'ladi. Bunday iqtisodiy jarayonlar «raqobatli» deb ataladi.

Shaxmat, shashka, domino va boshqa o'yinlar raqobatli jarayonlarni ifodalovchi o'yinlar hisoblanadi. Bunday o'yindagi har bir yurishda bir o'ynovchining yutug'i ikkinchisining yurishiga bog'liq bo'ladi. O'yinning maqsadi o'ynovchilarning bittasini yutishidan iborat.

Iqtisodiyotdagi raqobatli holatlarga ta'minotchi va iste'molchilar, sotuvchilar va xaridorlar, banklar va mijozlar oralaridagi munosabatlar misol bo'laoladi. Bu munosabatlardagi raqobatli holatlar tomonlarning intilishlari zidligidan kelib chiqadi. Raqobatli holatlarda yechim qabul qiluvchi shaxs faqat o'z maqsadini ko'zlashdan tashqari raqibining maqsadini nazarga olishi hamda uning qabul qilishi mumkin bo'lgan yechimini oldindan ko'ra bilishi kerak. Shunday qilib, raqobatli holatlardagi masalalarni yechish uchun ilmiy asoslangan usullar talab qilinadi.

Raqobatli holatlarning matematik nazariyasi «**O'yinlar nazariyasi**» deb ataladi.

1- §. O'yinlar nazariyasining asosiy tushunchalari

Matematikaning raqobatli holatlarini, ya'ni qantashuvchilarning manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o'rganuvchi bo'limi – «**o'yinlar nazariyasi**» deb ataladi. O'yinlar nazariyasi – raqobatli holatda qatnashayotgan har bir o'yinchiga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga)

erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlash uchun yo'llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko'pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o'yinlar nazariyasi nuqtai-nazaridan qarash mumkin. Masalan, o'yin ishtiroqchilari – bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta'minotchilar va iste'molchilar bo'lib, o'yining yutug'i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag'lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo'lishi mumkin.

O'yinlar nazariyasi nisbatan yosh fanlar qatoriga kiradi. Uning paydo bo'lishi Neyman va Morgenshternlarning 1944 yil nashr etilgan «Iqtisodiy jarayonlar va o'yinlar nazariyasi» monografiyasi bilan bog'liq. Keyinchalik o'yinlar nazariyasi amaliy tadbirlarga ega bo'lgan mustaqil yo'nalish sifatida rivojlandi.

Shuni ta'qidlash lozimki, o'yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko'p marta takrorlanadigan raqobatli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, raqobatli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo'lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi.

O'yin- raqobatli holatlarni ifodalovchi modeldan iborat bo'lib, uning haqiqiy raqobatdan farqi shundan iboratki, u ma'lum bir qoida asosida amalga oshiriladi.

Har bir o'ynovchining ma'lum maqsadga erishish niyatida bajarishi mumkin bo'lgan harakatlari **o'yinning qoidalari** deb ataladi.

O'yinning natijalarini miqdoriy baholash **to'lov** deb ataladi. O'yinning mohiyati shundan iboratki, unda har bir o'ynovchi o'ziga eng yaxshi natija beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O'yinda ikkita yoki undan ko'p ishtiroqchilarning manfaatlari to'qnashishi mumkin. Shunga muvofiq, u **ikki o'ynovchili** va **ko'p o'ynovchili** bo'lishi mumkin.

Agar o'yinda faqat ikkita o'ynovchi qatnashsa, bunday o'yin «**juftli o'yin**» deb ataladi.

Agar juftli o'yinda bir o'ynovchining yutug'i ikkinchi o'ynovchining yutqazuviga teng bo'lsa, bunday o'yin «**0- summali o'yin**» deb ataladi. 0- summali o'yinda o'yinchilarning umumiy kapitali o'zgarmaydi, faqat o'yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0$$

bu erda v_j – j-o'ynovchining yutug'i.

Nol summali bo'lmagan o'yinda o'ynovchilar yutuqlari yig'indisi noldan farqli bo'ladi. Masalan, lotoreya o'yinida, o'ynovchilar qo'ygan badalning bir qismi lotoreya tashkilotchilariga beriladi. Shuning uchun

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n < 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Biz bu erda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar – juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. O'yin ishtirokchilarini A va B orqali belgilaymiz.

O'yin jarayonida ro'y berishi mumkin har qanday holatga muvofiq ravishda o'ynovchining qo'llashi mumkin bo'lgan qoidalar birlashmasi «**strategiya**» deb ataladi. Strategiyaning soniga qarab, o'yinlar **chekli** yoki **cheksiz** o'yinlarga bo'linadi. **Optimal strategiya** deb, tayin bir o'ynovchiga, o'yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo'lgan o'rtacha yutuqni ta'minlovchi strategiyaga aytiladi.

Har qanday 0- summali juftli o'yinni yutuqlar matritsasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlash mumkin. Bu matritsaning har bir a_{ij} elementi A o'ynovchi matritsaning i -qatoriga mos keluvchi A_i yurishni B_j o'ynovchi j - ustunga mos keluvchi B_j yurishni tanlagandagi A o'ynovchining yutug'ini bildiradi.

Komponentalari

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ vektor-qator A o'ynovchining «**aralash strategiyasi**» deyiladi.

Xuddi shuningdek, komponentalari

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, vektor-ustun B o'ynovchining «**aralash strategiyasi**» deyiladi. Bunda x_i va y_j lar mos ravishda A o'ynovchi o'zining A_i yurishini va B o'ynovchi B_j yurishini tanlash ehtimollarini bildiradi.

Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ aralash strategiyada i - komponenta 1 ga teng bo'lib, qolganlari 0 ga teng bo'lsa, u holda bunday aralash strategiya A o'ynovchining «**i-sof strategiyasi**» deb ataladi.

Masalan, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) strategiyalar sof strategiyalardir.

Xuddi shuningdek, j - komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentalari 0 ga teng bo'lgan Y aralash strategiya B o'ynovchining «**j- sof strategiyasi**» deb ataladi.

Demak, A o'ynovchining yutuqlar matritsasining i - qatoriga mos keluvchi A_i yurishi uning i -sof strategiyasidan iborat bo'ladi. Xuddi shuningdek, B o'ynovchining yutuqlar matritsasining j - ustuniga mos keluvchi B_j yurishi uning j -sof strategiyasidan iborat bo'ladi.

2-§. Matritsali o'yining yechimi

Yutuqlar matritsasi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lgan matritsali o'yinni ko'raylik. Agar A o'ynovchi i-sof strategiyani tanlasa, u kamida

$$\min_j a_{ij}$$

yutuqqa ega bo'ladi. A o'ynovchi o'zining yutug'ini maksimal qilishga harakat qiladi. Demak, u shunday i- sof strategiyani tanlashi kerakki, natijada uning yutug'i maksimal bo'lsin, ya'ni A o'ynovchi

$$\max_i \min_j (a_{ij})$$

natijani beruvchi sof strategiyani tanlaydi. Ushbu kattalikni α bilan belgilaymiz.

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij})$$

bu erda α - A o'ynovchining ishonchli yutug'idan iborat bo'lib, u «**o'yinning quyi bahosi**» deb ataladi. B o'ynovchi, o'z navbatida, o'zining eng katta mumkin bo'lgan yutqazuvini minimallashtirishga harakat qiladi. Shuning uchun

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij})$$

yutqazuvni beruvchi j- sof strategiyani tanlaydi. Bu erda β - B o'ynovchining ishonchli minimal yutqazuvidan iborat bo'lib, u «**o'yinning yuqori bahosi**» deb ataladi. β yutqazuvga erishishga imkon beruvchi B_{j_0} yurish (j_0 – sof strategiya) «minimaks»deb ataladi.

1- teorema. Har qanday matritsali o'yinda o'yinning α quyi bahosi uning β yuqori bahosidan oshmaydi, ya'ni

$$\alpha \leq \beta.$$

Isboti. Ta'rifga asosan

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \leq a_{ij}$$

hamda

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \geq a_{ij}$$

Bu munosabatlarni birlashtirsak

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_j a_{ij} = \beta_j$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan

$$\alpha_i \leq \beta_j$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik i va j indekslarning ixtiyoriy kombinatsiyalari uchun, shu jumladan

$$\max_i \alpha_i = \alpha$$

va

$$\min_j \beta_j = \beta$$

shartlarni qanoatlantiruvchi i va j lar uchun ham o'rinalidir. Demak,

$$\alpha \leq \beta$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Agar matritsali o'yinning quyi va yuqori baholari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni

$$\alpha = \beta$$

shart bajarilsa, u holda ushbu o'yin **egor nuqta**ga hamda

$$V = \alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

shartni qanoatlantiruvchi **bahoga** ega deyiladi.

Bu holda A matritsaning

$$V = \alpha = \beta$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_{i_0}, B_{j_0}) juftlikka mos keluvchi $a_{i_0 j_0}$ elementi **egor nuqta** deb ataladi. Bu element j_0 ustunda maksimal va i_0 qatorda minimal bo'ladi, ya'ni:

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}.$$

Agar B o'ynovchi o'zining minimaks strategiyasidan voz kechsa, uning yutqazuvi oshadi. Xuddi shuningdek, agar A o'ynovchi o'zining maksimin strategiyasidan voz kechsa, uning yutug'i kamayadi. Demak, **egor nuqtalarga**

o'yinning A_{i_0}, B_{j_0} optimal strategiyalari mos keladi. Hamda $\{A_{i_0}, B_{j_0}, V\}$ to'plam o'yinning yechimi deyiladi.

1-misol. Quyidagi to'lov matritsalarini bilan berilgan o'yinlar uchun o'yinning quyi va yuqori baholarini toping:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. A_1 matritsa qatorlari uchun a_{ij} elementlarning eng kichiklari mos ravishda 2;3;1 ga teng. Ularning ichidagi maksimali esa 3 ga teng. Demak, A_1 matritsaning quyi bahosi $\alpha_1=3$.

O'yinning yuqori bahosini topish uchun A_1 -matritsa ustunlari bo'yicha maksimal elementlarni topamiz. Bular mos ravishda: 4;5;6;5. Endi bular ichidan minimalini, ya'ni $\beta_1=4$ ni topamiz. Demak, A_1 -matritsa uchun $\alpha_1=3$; $\beta_1=4$.

A_2 -matritsa uchun esa, $\alpha_2 = \max\{0; 2; -1\} = 2$;

$$\beta_2 = \min\{3; 2; 4; 5\} = 2.$$

Shunday qilib, bu holda $V=\alpha_2=\beta_2=2$ – o'yinning bahosidir. Demak, bu o'ynovda A o'ynovchining yutug'i 2 dan kam emas va B o'ynovchining yutqazishi 2 dan oshmaydi.

Agar matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu o'yinning yechimini topish uchun egar nuqtaga mos keluvchi A_{i_0}, B_{j_0} optimal strategiyalarni hamda

$$V = \alpha = \beta$$

shartni qanoatlantiruvchi bahoni topish kerak.

Demak, agar matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda A va B o'ynovchilarning maksimin va minimaks strategiyalari optimal strategiya bo'ladi hamda yutuqlar matritsasining egar nuqtasi o'yinning bahosini beradi.

Agar matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'lmasa, u holda uning yechimi aralash strategiyalarda topiladi.

Agar A o'ynovchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ aralash strategiyani qo'llab, B o'ynovchi $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)'$ aralash strategiyani qo'llasa, u holda A o'ynovchi o'zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimol bilan, B o'ynovchi esa, o'zining B_j sof strategiyasini y_j ehtimol bilan tanlaydi. Bu holda (A_i, B_j) juftlikni tanlash ehtimoli $x_i \cdot y_j$ ga teng bo'ladi. Aralash strategiyalar qo'llanganda o'yin tasodifiy xarakterga ega bo'ladi. Shuning uchun o'yinning yutug'i ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Demak, bu holda yutug'larning o'rtacha miqdori, ya'ni uning matematik kutilishi haqida gapirish mumkin.

$A=(a_{ij})_{(m \times n)}$ matritsali o'yinning yutug'lar funktsiyasi yoki A o'ynovchi yutug'ining matematik kutilishi deb

$$f(X, Y) = M(X, Y) = XAY = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j \quad (12.1)$$

formula orqali aniqlanuvchi funktsiyaga aytiladi, bu erda $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ A o'ynovchining va $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ B o'ynovchining ixtiyoriy aralash strategiyalari.

2- misol.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsali o'yinda $X=(x_1, x_2, x_3)$ va $Y=(y_1, y_2, y_3)'$ mos ravishda A va V o'ynovchilarning aralash strategiyalari. Bu o'yin uchun yutug'lar funktsiyasini topamiz.

$$\begin{aligned} f(X, Y) = M(X, Y) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\ &= (x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3. \end{aligned}$$

Agar $X=(0,1; 0,4; 0,5)$ va $Y=(0,3; 0,3; 0,4)'$ bo'lsa, $M(X, Y)=-0,03$ bo'ladi.

Deylik, $X^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ A o'ynovchining aralash strategiyasi, $Y^0=(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)'$ B o'ynovchining aralash strategiyasi bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

2- teorema. $X^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ va $Y^0=(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)'$ aralash strategiyalar jufti va B haqiqiy son matritsali o'yinning yechimi bo'lishi uchun $j=1, 2, \dots, n$ sof strategiyalarda

$$M(X^0, j) \geq V \quad (12.2)$$

bo'lib, $i=1, 2, \dots, m$ sof strategiyalarda

$$M(i, Y^0) \leq V \quad (12.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va etarlidir. Teorema shartlarini qanoatlantiruvchi X^0 , Y^0 aralash strategiyalar optimal strategiya, V haqiqiy son esa, o'yinning bahosi deb ataladi.

Demak, $\{A_{i_0}, B_{j_0}, V\}$ to'plamni matritsali o'yinning yechimi ekanligini tekshirish uchun (12.2) va (12.3) tengsizliklarning bajarilishini tekshirish lozim.

3- misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsali o'yinning echimini aralash strategiyalarda toping.

Yechish. A o'ynovchining aralash strategiyasi $X=(x_1, x_2)$ vektor qatordan va B o'ynovchining aralash strategiyasi $Y=(y_1, y_2)'$ vektor ustundan iborat bo'lsin.

(12.2) tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz:

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (j) \geq V.$$

Bundan

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq V, \\ -x_1 + x_2 &\geq V, \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan

$$X=(1/2; 1/2), \quad V=0$$

ekanligini aniqlaymiz.

Endi (12.3) tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (i) \leq V$$

hamda

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_2 &\leq V, \\ -y_1 + y_2 &\leq -V, \\ y_1 + y_2 &= 1 \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan quyidagini topamiz:

$$Y=(1/2; 1/2)', \quad V=0.$$

Demak, bu o'yinda $X=(1/2; 1/2)$ va $Y=(1/2; 1/2)'$ vektorlar optimal strategiyalar bo'lib, o'yinning bahosi $V=0$ bo'ladi.

Eng sodda matritsali o'yinda yutuqlar matritsasi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}$$

bo'lib, matritsa egar nuqtaga ega bo'lmasa, $X=(x_1, x_2)$ va $Y=(y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V – o'yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

3-§. Matritsali o'yinni chiziqli dasturlash masalasiga keltirish

$m \times n$ – o'lchovli matritsa bilan berilgan quyidagi o'yinni qaraymiz:

Matritsa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblaylik va shuning uchun o'yinning

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yechimini $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. A – o'ynovchining optimal strategiyasida yuqoridagi (12.2) munosabat va B - o'ynovchining optimal strategiyasida (12.3) munosabat bajariladi. Shuning uchun, (A -o'ynovchining) quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi optimal strategiyasini topish masalasini qo'yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq V, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq V, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq V, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1. \end{cases} \quad (12.4)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

O'yinning bahosi bo'lgan V -kattalik noma'lum, lekin doim $V > 0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matritsa elementlariga bir xil musbat son qo'shish sharti bilan erishish mumkin. (12.4) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo'lib, quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1, \\ t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1/V. \end{cases} \quad (12.5)$$

$$t_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Bunda $t_1 = x_1/V$, $t_2 = x_2/V$, ..., $t_m = x_m/V$.

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ shartdan $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1/V$ tenglik kelib chiqadi.

A o'ynovchi uchun o'yinning yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m$ funktsiya minimal qiymatga erishishi kerak. Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \text{-----}, \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \quad (12.6)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \dots, t_m \geq 0, \quad (12.7)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m \rightarrow \min. \quad (12.8)$$

Bu masalani yechib, t_i qiymatlar va $1/V$ kattalik topiladi, hamda undan foydalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi.

B o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq V, \\ \text{-----}, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq V, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, \\ y_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (12.9)$$

yoki tengsizliklarni V ga bo'lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ \text{-----}, \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \leq 1, \\ u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1/V, \\ u_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (12.10)$$

sistemani hosil qilamiz. Bunda $u_i = y_i/V$.

u_1, u_2, \dots, u_n – noma'lumni shunday qiymatlarini topish kerakki, ular uchun (10) shart bajarilib

$$W = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1/V$$

funktsiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, V o'ynovchi uchun matritsali o'yin quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ \text{-----}, \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \leq 1, \\ u_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ W = u_1 + u_2 + \dots + u_n \rightarrow \max \end{cases}$$

Shunday qilib, matritsali o'yinning yechimini topish simmetrik qo'shma chiziqli dasturlash masalalariga keltiriladi. Bu qo'shma masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

1- misol. Matritsa bilan berilgan quyidagi o'yinning yechimini toping.

Yechish. A o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

chiziqli dasturlash masalasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1, \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, \\ Z = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \leq 1, \\ u_i \geq 0, \quad (i=\overline{1,4}) \\ W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \rightarrow \max \end{cases}$$

Bu ikkilangan masalarning yechimi $U=(3/14; 0; 0; 1/14)$, $W_{\max}=1/V=2/7$ bo'ladi. Demak, $V=7/2$, hamda $y_j=Vu_j$ tenglikdan B o'ynovchining optimal strategiyasi $Y=(3/4;0;0;1/4)'$ topiladi. A o'ynovchi uchun masalaning yechimi $T=(1/7;1/7;0)$, $V=7/2$ bo'ladi. Bu holda A o'ynovchining optimal strategiyasi $X=(1/2;1/2;0)$ bo'lib, uning yutug'i $V=7/2$ bo'ladi.

4-§. Tabiatga qarshi o'yin. Optimallik mezonlari

Endi hech qanday ehtimoliy tavsiflari ma'lum bo'lmagan sharoitda yechimlar qabul qilish uslubi bilan tanishamiz. Bunday sharoitda yechimlar qabul qilish (EQQ) uchun minimaks-maksimin, Vald, Laplas, Sevij va Gurvits mezonlari ishlatiladi.

Ko'p hollarda o'yinda yechim qabul qiluvchi shaxs (EQQSh) deb ataluvchi bir o'ynovchi (yoki bir maqsad yo'lida birlashuvchi o'ynovchilar guruhi) va «tabiat» qatnashadi. Bunday EQQShni A o'ynovchi deb, «tabiat»ni esa T o'ynovchi deb belgilaymiz. Bunda «tabiat» A o'ynovchining faoliyatini, ya'ni yechimlar qabul qilish uchun kerak bo'lgan tashqi sharoitlar majmuasini aniqlaydi. «Tabiat» A o'ynovchiga ongli ravishda qarshilik qilmaydi. Ular orasida o'zaro raqobatli vaziyat ham mavjud emas. Lekin «tabiat» o'zining T_1, T_2, \dots, T_n holatlaridan ixtiyoriy birini, amalga oshirishi mumkin. A o'ynovchiga «tabiat»ning qaysi holati amalga oshirishini bilmagan holda, ya'ni noaniqlikda yechim qabul qilishga to'g'ri keladi. «Tabiat» o'zining yutug'iga befarq, uning harakatlarida A o'ynovchiga nisbatan yovuz niyatlari ham yo'q.

A o'ynovchining har bir A_i ($i=1, \dots, m$) yo'li va «tabiat» (T)ning mumkin bo'lgan holati T_j ($j=1, \dots, n$) uchun $a(A_i, T_j)$ natija mos keladi. Bu natija yutuq yoki yutqazuv bo'lishi mumkin. Umumiy holda $a(A_i, T_j)$ A_i va T_j parametrlarning uzluksiz funktsiyasidan iborat bo'ladi. Agar A o'ynovchi «tabiat»ning ixtiyoriy T_j yurishida o'zining sof strategiyasi natijalarini baholay bilsa, u holda $// a(A_i, T_j) //$ matritsa $// a_{ij} //_{m \times n}$ matritsaga aylanadi. Bu matritsani soddalashtirishda faqat A o'ynovchining A_i strategiyalar sonini kamaytirish mumkin, lekin «tabiat»ning birorta T_j holatini tashlab yuborish mumkin emasligini nazarda tutish kerak. Chunki A o'ynovchiga bog'liq bo'lmagan holda «tabiat» o'zining ixtiyoriy holatini amalga oshirishi mumkin. Yuzaki qaraganda, ongli raqibning yo'qligi A o'ynovchining yechimlar qabul qilishini engillashtirganday bo'ladi. Aslida esa A o'ynovchi uchun o'z strategiyasini asoslash bilan bog'liq bo'lgan qiyinchilikni hal qilishga to'g'ri keladi. Ongli raqib bilan bo'lgan o'yinda raqib uchun ham «fikr yuritish» mumkin. «Tabiat»ning holatlarini esa oldindan ko'rish mumkin emas. Shuning uchun A o'ynovchiga o'zining har bir yurishini har tomonlama asoslashga to'g'ri keladi.

A o'ynovchining strategiyasini tanlab, uni asoslashda ko'pincha to'lovlar matritsasi o'rniga «**tavakkalchilik**» **matritsasi** deb ataluvchi matritsaga o'tishga to'g'ri keladi. Chunki to'lovlar matritsasidan foydalanib u yoki bu strategiyaning foydaliligini aniqlashda ayrim tushunmovchiliklarga yo'l qo'yish mumkin. Masalan, agar «tabiat» T_j holatda bo'lib, A o'ynovchi A_i strategiyani tanlasin va o'yinning yutug'i $a_{ij}(A_i, T_j)$ ga teng bo'lsin hamda bu yutuq $a_{kl}(A_k, T_l)$ dan katta bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni

$$a_{ij}(A_i, T_j) \geq a_{kl}(A_k, T_l), \quad (12.11)$$

bu erda $a_{kl}(A_k, T_l)$ – A o'ynovchi A_k strategiyani, «tabiat»ning T_l holatiga qarshi tanlangandagi o'yinining yutug'i.

Lekin bu tengsizlik (A_i, T_j) juftga mos kelgan yutuq (A_k, T_l) juftga mos kelgan yutuqdan katta ekanligini ko'rsatsa ham, bundan A_i strategiya A_k strategiyadan yaxshiroq degan xulosa kelib chiqmaydi, chunki A_i strategiya A_k dan yaxshiroq bo'lmasa ham A o'ynovchi uchun «tabiat»ning T_j holati uning T_l holatiga nisbatan «foydaliroq» bo'lganda ham yuqoridagi tengsizlik o'rinli bo'lishi mumkin.

«Tavakkalchilik» matritsasining elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij}, & a_{ij} - \text{daroomad}, \\ a_{ij} - \min_j a_{ij} = a_{ij} - \alpha_j, & a_{ij} - \text{zarar} (\text{ютказув}), \end{cases} \quad (12.12)$$

bu erda β_j (α_j)- «tabiat»ning T_j holatidagi EQQShning maksimal yutug'i (maksimal yutqazuvi), r_{ij} - EQQSh ning «tabiat»ning T_j holatiga to'la chora ko'rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko'rgan zararini yoki uning «afsuslanishini» baholovchi sonni bildiradi.

Bu o'yinda tabiat va yechim qabul qiluvchi shaxs (EQQSh) qatnashadi. Tabiatning T_1, T_2, \dots, T_n holatlari mavjud bo'lib, ularga qarshi EQQSh da m ta A_1, A_2, \dots, A_m tadbirlar mavjud. Tabiatga qarshi o'yinni quyidagi matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

T_j	T_1	T_2	...	T_n
A_i				
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Bu erda a_{ij} - tabiatning T_j holatida EQQSh A_i tadbirni amalga oshirgandagi uning ko'radigan foydasi yoki zararini ko'rsatadi. Agar a_{ij} – foyda (yutuq) bo'lsa, bu matritsa «yutuqlar matritsasi» deyiladi. a_{ij} – yutqazuv (zarar) bo'lgandagi matritsa «to'lovlar matritsasi» deyiladi.

Bu matritsa asosida EQQSh o'zining foydasini (zararini) maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) yo'lni (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyani tanlash uchun minimaks, Vald, Laplas, Sevidj va Gurvits mezonlaridan foydalanish mumkin. Ana shu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barcha T_1, T_2, \dots, T_n holatlari teng ehtimol bilan ro'y beradi degan fikr asos qilib olingan. Tabiatning T_1, T_2, \dots, T_n holatlari $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ ehtimol bilan ro'y bersin. U holda agar EQQSh A_1 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + \dots + \frac{1}{n}a_{1n},$$

yoki

$$Q_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{1j}$$

bo'ladi. Agar EQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{2j}$$

bo'ladi va hokazo. Agar EQQSh A_m yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{mj}$$

bo'ladi. EQQSh maksimum yutug' beruvchi yo'lni, ya'ni

$$\max \left[\frac{1}{n} \sum_j a_{1j}, \frac{1}{n} \sum_j a_{2j}, \dots, \frac{1}{n} \sum_j a_{nj} \right] = \max_i \frac{1}{n} \sum_j a_{ij},$$

yo'lni tanlaydi.

1- misol. Quyidagi matritsa ko'rinishida berilgan tabiatga qarshi o'yinni yeching.

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\dots+a_{in}p_n$
A_1		7	11	14	24	$\frac{1}{4} (7+11+14+24)=14$
A_2		20	16	14	22	$\frac{1}{4} (20+16+14+22)=18$
A_3		9	8	10	23	$\frac{1}{4} (9+8+10+23)=12.5$
A_4		18	26	18	14	$\frac{1}{4} (18+26+18+14)=19$
p_j		1/4	1/4	1/4	1/4	$\max_i \frac{1}{4} (a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in})=19$

Yechish. EQQSh ning har bir strategiyasiga mos keluvchi $a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\dots+a_{in}p_n$ summaning qiymati jadvalning oxirgi ustunida keltirilgan Laplas mezoniga ko'ra EQQSh A_4 sof strategiyani tanlasa, uning yutug'i eng ko'p (19 ga teng) bo'ladi.

2.

Bayes mezoni. Agar vaziyatning to'la noaniqlikdan va unda hech qanday ehtimoliy tasviflar mavjud emaslik shartidan biroz chetga chiqib «tabiat»ning holatlarini r_1, r_2, \dots, r_n ehtimoliy sonlar orqali ifodalash mumkin deb faraz qilsak, u holda yechim tanlashda Bayes mezonidan foydalanish mumkin. Laplas mezoni Bayes mezonining xususiy holi hisoblanadi. Bayes mezonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j, \quad \text{agar } a_{ij} - \text{EKKSh ning yutugi bulsa,} \quad (12.13)$$

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j, \quad \text{agar } a_{ij} - \text{EKKSh ning yutkazuvi bulsa,} \quad (12.14)$$

Agar $r_1=r_2=\dots=r_n=1/n$ bo'lsa, Bayes mezoni Laplas mezoniga aylanadi.

1- misol. Faraz qilaylik, mahsulot ochiq havoda saqlansin. Tabiatning 4 ta holati T_j ($j=1,2,3,4$) bo'lishi mumkin (yomg'ir yog'adi – ehtimoli $r_1=0,1$, havo ochiq bo'ladi – ehtimoli $r_3=0,5$ va ehtimollari $r_2=r_4$ bo'lgan ikkita o'rtacha holat). A o'ynovchi uchta A_1, A_2, A_3 strategiyalarni tanlashi (masalan, mahsulotlarni turlicha baholashi va natijada turlicha daromad olishi mumkin).

Quyida daromadlar matritsasi berilgan: Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.

T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\dots+a_{in}p_n$
A_i					
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
r_j	0.1	0.2	0.5	0.2	$\max_i (a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\dots+a_{in}p_n)=6.2$

Yechish. EQQSh I-strategiyani tanlasa, uning yutug'i, $2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,2 = 4,2$ ga teng bo'ladi. II-strategiyadagi yutug' $3 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 4,8$. Xuddi shuningdek III-strategiyadagi yutug' 6,2 bo'ladi.

Bu misolda optimal strategiya A_3 . Bu yo'lni tanlaganda EQQSh 6.2 yutuqqa ega bo'ladi.

Vald mezoni. Faraz qilaylik, a_{ij} tabiatning T_j holatiga qarshi EQQSh ning A_i – chora tadbirlarni ko'rishi oqibatida oladigan foydasi bo'lsin: bu holda Vald mezoni bo'yicha optimal sof strategiya deb shunday strategiyani tushunish kerakki, unda A ning σ yutug'i tabiat bilan bo'lgan o'yinning quyi bahosidan kam bo'lmaydi, ya'ni

$$\sigma \geq \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} \quad (13.15)$$

Bu strategiya barcha $\left(\min_j a_{ij} \right)$ minimal yutuqlar ichidan maksimalini tanlaydi. Agar a_{ij} yutqazuvni ko'rsatsa, Vald mezoni bo'yicha topilgan optimal strategiya shunday sof strategiya bo'ladiki, undagi yutqazuv «tabiat» bilan o'yinning yuqori bahosi $\min_i \left(\max_j a_{ij} \right)$ dan kam bo'lmaydi, ya'ni bu holda EQQSh tanlangan strategiya maksimal yutqazuvlar ichida minimumini tanlashga yordam beradi. Vald mezoni EQQSh ni eng yomon sharoitda yaxshi yechim qabul qilishga o'rgatadi. Bu mezon asosida «tabiat» bilan o'ynaganda «tabiat»ni eng aktiv va yomon raqib bilan almashtirganday bo'lamiz. Bu mezon pessimistik mezon bo'lib, u asosan «har vaqt yomonni ko'zda tutish kerak» printsiplari assoslangan.

3- misol. Korxona mijozlarning talabini qondirishi kerak, lekin talablarning aniq qiymati ma'lum emas, ular to'rtta qiymatdan birortasini qabul qilishi mumkin. Bu talablarni qondirish uchun korxona rahbariyati 4 xil taklif darajasini namoyon qilishi mumkin. Bu taklif darajalaridan chetlanish korxonaga ma'lum miqdorda zarar keltiradi. Bu zararlar talabdagidan ko'ra ko'proq mahsulot ishlab chiqargani yoki talab to'la qondirilmagani uchun paydo bo'lishi mumkin.

Quyidagi jadval yutqazuvlar (zararlar) matritsasi bo'lib undagi har bir a_{ij} A_i taklif darajasi va B_j talab darajasiga mos keluvchi zarar (yutqazuv)ni mln. so'm birligidagi qiymatini bildiradi.

T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_i				
A_1	7	11	14	24
A_2	20	16	14	22
A_3	9	8	10	23
A_4	18	21	18	14

Ushbu tabiatga qarshi o'yinni Vald mezoni asosida yeching.

Masalani yechish jarayonini quyidagi jadvalda tasvirlaymiz:

T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j(a_{ij})$
A_i					
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	21	18	14	26
					$\min_i \{ \max_j (a_{ij}) \} = 22$

Jadvaldan ko'rinadiki, A_1 strategiya uchun $\max(7,11,14,24)=24$, A_2 strategiya uchun $\max(20,16,14,22)=22$ va A_3 strategiya uchun $\max(9,8,10,23)=23$, hamda

$$\min_j \{ \max_i a_{ij} \} = \min(24, 22, 23, 26) = 22$$

bo'ladi. Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutuqazuv 22 bo'ladi.

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimaks printsipligiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to'lovlar yoki yutug'lar matritsasi o'rniga tavakkalchilik matritsasi deb ataluvchi (r_{ij}) matritsa ishlatiladi. Bu matritsa elementlari (12.9) formulalar yordamida topiladi.

4-misol. Quyidagi tabiatga qarshi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

T_j	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_i			
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min_i \{ \max_j (a_{ij}) \} = 100000$

Bu o'yinda EQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu natija tabiatning T_1 holatida ham, T_2 holatida ham ro'y bo'lishi mumkin. Tabiatning aniq bir holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matritsasini tuzamiz:

A_i	T_j	T_1	T_2	$\max_j(r_{ij})$
A_1		10000	0	10000
A_2		0	99100	99100
				$\min_i \{ \max_j (r_{ij}) \} = 10000$

$(r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij})$. Jadvaldan ko'rinadiki $\max_j r_{1j} = 10000$, $\max_j r_{2j} = 99100$ hamda $\min_i \{ \max_j (r_{ij}) \} = 10000$. Demak optimal strategiya A_1 bo'lib, bu strategiya bo'yicha tavakkalchilikdan ko'riladigan zarar 10000 pul birlikka teng bo'ladi.

Sevidj mezoni bo'yicha optimal strategiya deb yomon sharoitda tavakkalchilikdan ko'riladigan zararni minimallashtiruvchi A_i strategiyaga aytiladi. Boshqacha aytganda Sevidj mezoni yechim qabul qilishda tavakkalchilikdan ko'riladigan zararni oldini olishga qaratilgan.

Gurvits mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda EQQSh

$$\gamma_i = \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \quad \alpha \in [0,1] \quad (1214)$$

natijani beruvchi strategiyani tanlaydi. Agar a_{ij} – yutqazuvni bildirsa EQQSh

$$\gamma_i = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \quad \alpha \in [0,1] \quad (1215)$$

natijani ta'minlovchi A_i strategiyani tanlaydi. Bu erda α - yechim qabul qilish vaziyatini sub'ektiv baholash orqali aniqlanadigan parametr hisoblanadi. Masalan, $\alpha=1$ bo'lsa, vaziyat og'ir va uni to'g'rilash uchun choralar ko'rish talab qilinadi. $\alpha=0$ da esa vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko'rmasa ham bo'ladi deb hisoblanadi. α ni (0,1) oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab tanlanadi. α ni tanlash EQQShning temperamentiga va vaziyatni qanday baholashiga bog'liq. Vaziyat og'ir bo'lgan sari EQQSh qarshi choralar ko'radi va α ning qiymati 1 ga yaqinlashadi.

5-misol. Tabiat bilan bo'lgan o'yin quyidagi to'lovlar matritsasi bilan berilgan bo'lsin.

T_j	T_1	T_2	T_3
A_i			
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu o'yinga Gurvits mezonini qo'llab optimal strategiyani $\alpha = 0,4$ uchun topamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo'yicha tekshiramiz:

$$\gamma = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \quad \alpha \in [0,1]$$

T_j	T_1	T_2	T_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_i						
A_1	71	24	23	23	71	51.8
A_2	24	75	23	23	75	54.2
A_3	70	16	20	16	70	48.4
A_4	16	27	13	13	27	21.4
						$\min_i \gamma_i = 21,4$

Jadvaldan ko'rinadiki,

$$\gamma_1 = 0,4 \cdot 23 + 0,6 \cdot 71 = 51,8.$$

$$\gamma_2 = 0,4 \cdot 23 + 0,6 \cdot 75 = 54,2.$$

$$\gamma_3 = 0,4 \cdot 16 + 0,6 \cdot 70 = 48,4.$$

$$\gamma_4 = 0,4 \cdot 13 + 0,6 \cdot 27 = 21,4.$$

$$\min_i \gamma_i = 21,4.$$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo'lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan.

6-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo'lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo'lsin. Endi savdo

korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko'radigan zarari minimal bo'ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo'l), 30% (A_2 yo'l), 40% (A_3 yo'l), 50% (A_4 yo'l) tushirishga mo'ljallaydi. Bu yo'llarni EQQShning strategiyalari deb qaraymiz. «Tabiat»ning ikkita yo'li bor: 1) talabning kam egiluvchan bo'lishligi (T_1 yo'l) va 2) talabning ko'p egiluvchanligi (T_2 yo'l). Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

EQQSh strate-giyasi	Narxi-ning tushishi %	Eski bahosi	Yangi baho	Sotiladi-gan tovar miqdori	Ko'riladigan zarar
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	$4400=500 \cdot 12 - 100 \cdot 16$ $3900=500 \cdot 12 - 14 \cdot 150$ $3360=500 \cdot 12 - 12 \cdot 220$ $3700=500 \cdot 12 - 10 \cdot 230$				

Bu erda bir birlik mahsuloti savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan harajat 12 birlik deb qabul qilingan.

Xuddi shunday, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo'lgan hol uchun tuziladi.

EQQSh stratgiya-si	Narxi-ning tushishi %	Eski baho	Yangi baho	Sotiladi-gan tovar miqdori	Ko'riladi-gan zarar
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I va II jadvaldan foydalanib to'lovlar matritsasini tuzamiz va Vald mezonini qo'llab yechamiz:

A_i	T_j	T_1	T_2	$\max_i(a_{ij})$
A_1		4400	3600	4400
A_2		3900	1100	3900
A_3		3360	1200	3360
A_4		3700	1500	3700
				$\min_i \max_j a_{ij} = 3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo'ladi, ya'ni 3360 ga teng bo'ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz:

A_i	T_j	T_1	T_2	$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n$
A_1		4400	3600	4000
A_2		3900	1100	2500
A_3		3360	1200	2280
A_4		3700	1500	2600
r		1/2	1/2	$\min_i (a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n) = 2280$

Bu mezon bo'yicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo'ladi.

Sevidj mezonini qo'llash uchun (r_{ij}) matritsa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

A_i	T_j	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_1		1100	2500	2500
A_2		600	0	600
A_3		0	100	100
A_4		400	400	400
				$\min_i \max_j r_{ij} = 100$

Bu mezonga ko'ra ham narx 40% ga tushirilishi ma'qul.

Tayanch so'z va iboralar

O'yin, o'yinning qoidolari, raqobatli holat, juft o'yin, 0-summali o'yin, matritsali o'yin, strategiya, optimal strategiya, chekli va cheksiz o'yin, to'lov, to'lov funktsiyasi, to'lovlar va yutug'lar matritsasi, o'yinning quyi va yuqori bahosi, o'yinning yechimi (bahosi), maksimum va minimaks strategiyalar, aralash va sof strategiyalar, raqobatli bo'lmagan holat, tabiatga qarshi o'yin, optimallik mezonlari, «tavakkalchilik» matritsasi.

Nazorat savollari:

1. O'yinlar nazariyasining predmeti nimadan iborat?
2. O'yining qanday turlari mavjud?
3. Juftli o'yin nima?
4. Matritsali o'yin nima?
5. 0- summali o'yin qanday bo'ladi?
6. Yutuqlar matritsasi qanday ma'noga ega?
7. O'yinning quyi va yuqori bahosi nima?
8. Minimaks va maksimum strategiyalarni ta'riflang.
9. Aralash strategiya nima?
10. Sof strategiyani ta'riflang.
11. Aralash strategiyalardagi yechimda o'yinning yutug'i nimaga teng bo'ladi?
12. Matritsali o'yin bilan chiziqli dasturlash orasida qanday bog'lanish bor?
13. Tabiat bilan o'yin deganda qanday o'yinni tushunasiz?
14. Tabiat bilan o'yin raqobatli o'yindan qanday farq qiladi?
15. Laplas va Bayes mezonlarini ta'riflang.
16. Vald mezoni bo'yicha optimal strategiya qanday topiladi?
17. Sevidj mezoni bo'yicha optimal strategiya qanday topiladi?
18. Gurvitsning hosilaviy mezoni qanday?
19. Mezonlar orasidagi farq nimadan iborat?

Masalalar:

1. Yutuq matritsali

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

bo'lgan o'yinlar uchun to'lov funktsiyasini yozing, o'ynovchilarning optimal strategiyalarini va o'yin bahosini toping.

2. Yutuq matritsali

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

bo'lgan o'yinlarga mos chiziqli dasturlash masalasini tuzing va o'yinning yechimini toping.

3. $A=(a_{ij})$ o'yin matritsasi bir necha egar nuqtaga ega bo'lishi mumkinmi?

4. Quyida berilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida yutuqlarni maksimallashtiruvchi strategiyani toping.

T_j	T_1	T_2	T_3
A_i			
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
r	0.2	0.7	0.1

5. Quyidagi keltirilgan daromadlar matritsasiidan foydalanib, A shaxsning optimal strategiyasini Laplas mezoni asosida toping.

T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_i				
A_1	7	11	14	24
A_2	20	16	14	22
A_3	9	8	10	23
A_4	18	26	18	14

6. Tabiat bilan o'yin quyidagi to'lovlar matritsasi orqali berilgan.

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3
A_1		71	24	23
A_2		24	75	23
A_3		70	16	20
A_4		16	27	13

Vald, Sevidj va Gurvits mezonlari asosida optimal strategiyani toping.

7. Quyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlar asosida tabiat bilan o'yinning yeching (to'lovlar matritsasi berilgan).

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1		3	3	0	8
A_2		6	2	4	0
A_3		0	0	5	2
A_4		7	1	6	6

ADABIYOTLAR

1. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа», 1986.
2. Банди Б. Основы линейного программирования. Учебное пособие. М.: Радио и связь, 1989 .
3. Бабаджанов Ш.Ш. Математическое программирование. Учебное пособие. Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология.- М.: Наука, 1988 .
5. Джемилев Н.И., Эйдельмант М.И. Сборник задач по линейному программированию. Т: Ёқитувчи, 1990 .
6. Жуманиёзов Х.Н., Отаниёзов Б ва бошқалар. Математик программалаштириш (дарслик). Т. Адабиёт жамғармаси нашриёти, 2005.
7. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. Учебник МТУ. М: ДИС, 2000.
8. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского. Издательство «Прогресс». М.1985 .
9. Исследование операций /Под. ред. Моудера Дж., Элмаграби С. М: Мир, 1985. I и II тома.
10. Исследование операций в экономике. /Под. ред. Кремера Н.Ш. М: ЮНИТИ, 1997.
11. Кузнецов Ю.М. Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование – М: Высшая школа, 1980.
12. Кузнецов А.В., Новиков Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск. «Высшэйшая школа», 1985.
13. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое прогаммирование. Учебное пособие, Минск. «Высшэйшая школа», 1984.
14. Математическое программирование учебное пособие /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М.: Финстатинформ, 1996.
15. Райцкас Р.Л. и др. Количественный анализ в эканомике. М.: Мир, 1992.
16. Сакович В.А. Исследование операций. Справочное пособие Минск. «Высшэйшая школа», 1991.
17. Сафаева Қ., Бекназарова Н. Операцияларнинг текширишнинг математик усуллари. (Ўқув қўлланма). I-қисм, Т.: Ўқитувчи, 1984, II-қисм Т.: Ўқитувчи, 1990.
18. Сафаева Қ. Математик дастурлаш. Дарслик. Т. Ибн-Сино, 2004.
19. Сафаева Қ. Математик программалаш. Ўқув қўлланма. Т. “ЎАЖБНТ” Маркази, 2004.
20. Сафаева Қ., Шомансурова Ф. “ Математик программалаш” фанидан маъруза матнлар тўплами. ТМИ, 2003.
21. Сафаева Қ., Адигамова Э.Б. «Математическое программирование». Курс лекций. Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.

22. Сафаева Қ., Адигамова Э.Б., Бабаджанов Ш.Ш., Мамуров Э. «Математическое программирование». Сборник задач. Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.
23. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalash”. (ma’ruza kurslari). Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.
24. Safayeva Q., Bobojonov Sh.Sh., Mamurov E., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish”. Masalalar to’plami. Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.
25. Таха Х. Введение в исследование операций. Перевод с английского. Том 1,2. М: Мир, 1991.
26. Уотшем Т. Дж., Парраноу К. Количественные метода в финансах. М. «Финансы». 1999.
27. Хазанова Л. Э. Математическое моделирование в экономике – М: Из-во БЕК, 1998.
28. Fletcher R. Practical metods of optimization 2nd, edn ... John Wiley, New York, 1997.
29. Wilkes F.M. Mathematics for business. – Financt and Economics. Rout Ledge, London, 1994.

Mundarija.

Soʻz boshi	3
Kirish	5
I-bob. Chiziqli dasturlashning predmeti va masalalari	7
1-§. Chiziqli dasturlashning predmeti. Chiziqli dasturlash usullari bilan yechiladigan iqtisodiy masalalar va ularning matematik modellari	7
2-§. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qoʻyilishi va uning turli formada ifodalanishi	17
3-§. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Grafik usul. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish	24
Tayanch soʻz va iboralar	33
Nazorat savollari	33
Masalalar	34
II-bob. Chiziqli dasturlash masalasini algebraik usullar bilan yechish	36
1-§. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimi va uni topish usullari	36
2-§. Bazis yechimning optimallik sharti. Chekli optimal yechimning mavjud boʻlmaslik sharti. Yangi bazis yechimga oʻtish qoidasi	43
3-§. Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun simpleks usul (Dantsig usuli)	48
4-§. Sunʼiy bazis usuli	53
5-§. Xos chiziqli dasturlash masalasi. Tsikllanish va undan qutilish usuli (ε -usul)	55
Tayanch soʻz va iboralar	61
Nazorat savollari	61
Masalalar	62
III-bob. Chiziqli dasturlashda ikkilanish nazariyasi	65
1-§. Ikkilanish nazariyasining asosiy tushunchalari. Qoʻshma masalalar va ularning iqtisodiy talqini. Simmetrik va simmetrik boʻlmagan qoʻshma masalalar	65
2-§. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremlari va ularning iqtisodiy talqini	69
3-§. Iqtisodiy masalalar echimlarining tahlili.	79
4-§. Ikkilangan simpleks usul	85
Tayanch soʻz va iboralar	91

Nazorat savollari	91
Masalalar	92
IV-bob. Parametrni chiziqli dasturlash	95
1-§. Parametrli chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi va turlari. Parametrli dasturlash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini	95
2-§. Funktsiyasi parametrغا bog'liq bo'lgan masala	100
3-§. Ozod hadi parametrغا bog'liq bo'lgan masala (ikkilangan parametrli dasturlash masalasi)	106
Tayanch so'z va iboralar	113
Nazorat savollari	113
Masalalar	114
V-bob. Transport masalasi	116
1-§. Transport masalasining matematik modeli va xossalari	116
2-§. Transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish usullari	120
3-§. Transport masalasining optimal yechimining topish uchun potentsiallar usuli	127
4-§. Xos transport masalasi va uning to'g'irlashning ε -usuli	134
5-§. Ochiq modelli transport masalasi	135
6-§. Differentsial rentalar usuli (Brudno usuli)	137
Tayanch so'z va iboralar	143
Nazorat savollari	143
Masalalar	144
VI-bob. Butun sonli chiziqli dasturlash	147
1-§. Iqtisodiy masalalar	147
2-§. Butun sonli chiziqli dasturlash masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini	149
3-§. Butun sonli dasturlash masalasini yechish uchun Gomori usuli	152
Tayanch so'z va iboralar	157
Nazorat savollari	157
Masalalar	158
VII-bob. Chiziqsiz dasturlash masalalari	161
1-§. Chiziqsiz dasturlash masalasining qo'yilishi va turlari	161
2-§. Chiziqsiz dasturlash masalalarining geometrik talqini. Grafik usul	164
3-§. Shartsiz optimallashtirish masalasi	171

4-§. Shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli ekstremum masalasi va uning yechish uchun Lagranj usuli	176
Tayanch so'z va iboralar	183
Nazorat savollari	183
Masalalar	184
VIII-bob. Qavariq dasturlash	186
1-§. Qavariq to'plam. Qavariq funktsiyalar	186
2-§. Qavariq funktsiyaning ekstremumi	189
3-§. Qavariq dasturlash. Kun-Takker shartlari	192
4-§. Kun-Takker teoremasi	196
Tayanch so'z va iboralar	199
Nazorat savollari	199
Masalalar	200
IX-bob. Kvadratik dasturlash	201
1-§. Kvadratik formalar va ularning kanonik ko'rinishi	201
2-§. Kvadratik dasturlash masalasi uchun Kun-Takker shartlari	208
3-§. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Barankin-Dorfman usuli	213
4-§. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Bil usuli	219
Tayanch so'z va iboralar	225
Nazorat savollari	225
Masalalar	226
X-bob. Gradient usullar	227
1-§. Funktsiya gradienti tushunchasi	227
2-§. Mumkin bo'lgan yo'nalishlar	230
3-§. Funktsiyaning shartiz ekstremumini gradient usul bilan aniqlash	233
4-§. Qavariq dasturlash masalasini yechish uchun gradient usullar. Tezlik bilan ko'tarilishi usuli	235
5-§. Kvadratik dasturlash masalasini gradient usuli bilan yechish. Zoytendeykning mumkin bo'lgan yo'nalish usuli	242
Tayanch so'z va iboralar	251
Nazorat savollari	251
Masalalar	252
XI-bob. Dinamik dasturlash	254
1-§. Dinamik dasturlash haqida asosiy tushunchalar. Optimallik printsipi.	254
2-§. Dinamik dasturlash usuli bilan yechiladigan	

iqtisodiy masalalar _____	256
3-§. Dinamik dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi	
Bellmaning funktsional tenglamalari _____	259
4-§. Dinamik dasturlash usuli _____	261
5-§. Investitsiyani optimal taqsimlash masalasini	
dinamik dasturlash usuli bilan yechish _____	268
Tayanch so'z va iboralar _____	274
Nazorat savollari _____	274
Masalalar _____	275
 XII-bob. O'yinlar nazariyasi _____	278
1-§. O'yinlar nazariyasining asosiy tushunchalari _____	278
2-§. Matritsali o'yinning yechimi _____	281
3-§. Matritsali o'yinni chiziqli dasturlash	
masalasiga keltirish _____	286
4-§. Tabiatga bilan o'yin. Optimallik mezonlari _____	289
Tayanch so'z va iboralar _____	299
Nazorat savollari _____	299
Masalalar _____	300
 Adabiyotlar _____	302